Серия 6. Раскраски. Хроматический многочлен

1. На новогодний праздник пришли 99 детей. В гардеробе каждый из них обругал кого-то из остальных, причём никто не был обруган дважды. Когда Дед Мороз предложил всем загадать по два желания, первым желанием каждого ребенка было получить мороженое, а вторым — чтобы его обидчик не получил мороженое. Докажите, что у кого-то из детей сбудется ровно одно из загаданных желаний.

2. а) Пусть T — дерево, $v(T) = n$. Докажите, что $\chi_T(k) = k(k-1)^{n-1}$.

б) Пусть G — граф с $\chi_G(k) = k(k-1)^{n-1}$. Докажите, что G — дерево с n вершинами.

3. G — граф с $v(G) = n$ и $e(G) = m$, а $\chi_G(k) = k^n - a \cdot k^{n-1} + \dots$. Найдите коэффициент a (выразите через данные числа).

4. Пусть G — связный граф, $W \subset V(G)$. Докажите, что два утверждения равносильны.

1° Существует остовное дерево, в котором все вершины множества W являются висячими.

2° Для любого множества вершин $U \subseteq W$ граф $G - U$ связен.

5. Постройте регулярный граф степени 2021, не имеющий ни одного остовного регулярного подграфа.

6. Докажите, что для любого графа G существует такой двудольный подграф G', что:

$a)$ $e(G') \geq \frac{e(G)}{2}$;

$b)$ $d_{G'}(x) \geq \frac{d_G(x)}{2}$ для любой вершины $x \in V(G)$.