

### Серия 7.

1. В королевстве живут рыцари. Любые два из них либо враждуют (и такие среди них есть!), либо дружат, либо друг к другу безразличны. Друг врага рыцаря — враг этого рыцаря. Докажите, что хотя бы у одного рыцаря врагов больше, чем друзей.

2. В стране 100 городов. Каждые два города соединены прямым рейсом одной из двух авиакомпаний: синей или зеленой. Для любых четырех городов оказалось, что среди всех рейсов между ними ровно три рейса выполняются самолетами синей авиакомпании. Докажите, что всего рейсов синей авиакомпании столько же, сколько рейсов зеленой авиакомпании.

3. В регулярном графе  $G$  степени  $d$  нечетное число вершин. Докажите, что  $\chi'(G) = d + 1$ .

4. Дан граф  $G$  с  $e(G) > nv(G)$ , где  $n \in \mathbb{N}$ . Докажите, что этот граф не является  $(n + 1)$ -редуцируемым.

5. Пусть  $G$  — двудольный граф

а) Докажите, что  $G$  имеет регулярный двудольный надграф степени  $\Delta(G)$  (добавлять можно как вершины, так и рёбра).

б) Докажите, что  $\chi'(G) = \Delta(G)$  с помощью пункта а и теорем о паросочетаниях.

6. Дан граф, степени всех вершин которого равны 4. Его вершины покрашены в три цвета. Докажите, что есть цикл, вершины которого покрашены не более, чем в два цвета.