

Серия 8. Планарность, немного стереометрии и раскраски

1. На вечеринке гость считается застенчивым, если у него не более трех знакомых. Оказалось, что у каждого гостя не менее трех застенчивых знакомых. Докажите, что все гости — застенчивые.

2. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует двусвязный планарный граф G с $v(G) > n$, который имеет два неизоморфных плоских изображения.

3. Докажите, что любой выпуклый многогранник имеет либо вершину степени 3, либо грань-треугольник. (Выпуклый многогранник — трёхсвязный граф без петель и кратных рёбер, который можно изобразить на сфере без пересечений рёбер.)

4. Многогранник называется *правильным*, если он выпуклый, в каждой вершине сходится одно и то же число рёбер, а его грани — одинаковые правильные многоугольники.

а) Пусть у правильного многогранника в каждой вершине сходится k рёбер, а грань — это s -угольник. Докажите, что $(k - 2)(s - 2) < 4$.

б) Перечислите все правильные многогранники и докажите, что других нет.

5. В некотором государстве из каждого города выходит ровно три дороги, причем дороги друг с другом не пересекаются. Путешественник выходит из столицы по одной из дорог и далее по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что рано или поздно он вернется в столицу.

6. а) Докажите, что можно удалить не более $\frac{1}{k}$ рёбер из графа так, чтобы получился граф хроматического числа не более k .

б) Докажите, что любой граф G имеет такой подграф G' с $\chi(G') \leq k$, что для любой вершины v выполнено $d_{G'}(v) \geq \frac{k-1}{k} d_G(v)$.

7. В графе 2000 вершин, все они имеют степень 7. Докажите, что в этом графе можно выбрать 700 рёбер, не имеющих общих концов.