

# Теория графов. Глава 2. Пути и циклы.

Д. В. Карпов

2023

## Эйлеров цикл

- В этом разделе в рассматриваемых графах возможны кратные рёбра.

### Определение

- 1) *Эйлеров путь* в графе  $G$  — это путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз.
- 2) *Эйлеров цикл* в графе  $G$  — это цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз.
- 3) Граф  $G$  — *эйлеров*, если в нём есть эйлеров цикл.

- Разумеется, эйлеров путь и цикл в графе могут иметь самопересечения по вершинам.

### Теорема 1

*Связный граф  $G$  — эйлеров, если и только если степени всех вершин  $G$  четны.*

## Доказательство теоремы 1

⇒. Каждый раз, проходя через вершину  $v$ , эйлеров цикл проходит по двум ребрам, поэтому  $d_G(v)$  четна.

⇐. Начнем путь в произвольной вершине  $a$  и будем идти, удаляя из графа пройденные ребра, пока это возможно.

- Так как все степени четны, наш путь обязательно закончится в вершине  $a$ . В результате получится цикл  $Z$ .

- Пусть  $G_1, \dots, G_k$  — компоненты графа  $G - E(Z)$ . Степени всех вершин каждой из компонент четны. Поэтому, в каждом графе  $G_i$  есть эйлеров цикл  $Z_i$ .

- Поскольку граф  $G$  связан, то для каждого  $i \in [1..k]$  существует вершина  $u_i \in V(G_i)$ , лежащая на цикле  $Z$ . Тогда по вершине  $u_i$  несложно состыковать циклы  $Z$  и  $Z_i$  в один.

- Проделав такую операцию последовательно для циклов  $Z_1, \dots, Z_k$ , мы получим искомым эйлеров цикл в графе  $G$ . □

## Эйлеров путь

### Следствие

*Связный граф  $G$  имеет эйлеров путь, если и только если в графе  $G$  нет вершин нечетной степени или таких вершин ровно две.*

### Доказательство.

$\Rightarrow$ . Пусть ЭП имеет концы  $a$  и  $b$ . Если  $a = b$ , то наш путь — ЭЦ, а значит, степени всех вершин четны. Если же  $a \neq b$ , то в графе ровно две вершины нечетной степени — концы пути  $a$  и  $b$ .

$\Leftarrow$ . Количество вершин нечетной степени в графе четно. Если их нет, то в графе есть даже ЭЦ.

• Пусть в графе  $G$  ровно две вершины нечетной степени  $a$  и  $b$ . Добавим в граф ребро  $ab$  (если такое ребро есть, то добавим еще одно). Мы получили связный граф, в котором все вершины имеют четную степень и по теореме 2 есть ЭЦ  $C$ . Удалим из цикла  $C$  добавленное ребро  $ab$  и получим ЭП с концами  $a$  и  $b$ .

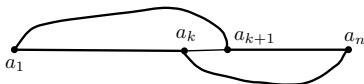
## Определение

- 1) *Гамильтонов путь* в графе  $G$  — это простой путь, проходящий по каждой вершине графа.
- 2) *Гамильтонов цикл* в графе  $G$  — это простой цикл, проходящий по каждой вершине графа.
- 3) Граф называется *гамильтоновым*, если в нем есть гамильтонов цикл.

## Лемма 1

Пусть  $n > 2$ ,  $a_1 \dots a_n$  — максимальный путь в графе  $G$ , причём  $d_G(a_1) + d_G(a_n) \geq n$ . Тогда в графе есть цикл длины  $n$ .

## Доказательство Леммы 1



- Если вершины  $a_1$  и  $a_n$  смежны, то  $a_1 a_2 \dots a_n$  — искомый цикл.
- Пусть  $a_1$  и  $a_n$  несмежны. Понятно, что  $N_G(a_1), N_G(a_n) \subset \{a_2, \dots, a_{n-1}\}$ .
- Пусть вершина  $a_n$  смежна с  $a_k$ , а вершина  $a_1$  смежна с  $a_{k+1}$ . Тогда в графе есть цикл из  $n$  вершин:  $a_1 a_2 \dots a_k a_n a_{n-1} \dots a_{k+1}$  (см. рисунок).
- Пусть  $N_G(a_n) = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_\ell}\}$ , тогда либо в графе есть цикл длины  $n$ , либо  $a_{i_1+1}, \dots, a_{i_\ell+1} \notin N_G(a_1)$ , следовательно,  $d_G(a_1) \leq n - 1 - d_G(a_n)$ .
- Противоречие завершает доказательство леммы. □

## Теорема 2

(О. Ore, 1960.) 1) Если для любых двух несмежных вершин  $u, v \in V(G)$  выполняется  $d_G(u) + d_G(v) \geq v(G) - 1$ , то в графе  $G$  есть гамильтонов путь.

2) Если  $v(G) > 2$  и для любых двух несмежных вершин  $u, v \in V(G)$  выполняется  $d_G(u) + d_G(v) \geq v(G)$ , то в графе  $G$  есть гамильтонов цикл.

**Доказательство. 1)** • Случай, когда в графе  $G$  ровно две вершины, очевиден. Далее пусть  $v(G) > 2$ .

• *Граф  $G$  связан.* (Пусть  $a$  и  $b$  — две несмежные вершины графа, тогда  $d_G(a) + d_G(b) \geq v(G) - 1$ , откуда следует, что  $N_G(a) \cap N_G(b) \neq \emptyset$ , то есть, вершины  $a$  и  $b$  связаны.)

## Доказательство критерия Оре

- Пусть  $a_1 \dots a_n$  — наибольший простой путь графа  $G$ .

Поскольку граф  $G$  связан и  $v(G) > 2$ , то  $n \geq 3$ .

Предположим, что  $n \leq v(G) - 1$ .

- В графе есть цикл на  $n$  вершинах: при  $a_1 a_n \in E(G)$  это очевидно, а при  $a_1 a_n \notin E(G)$  мы имеем

$d_G(a_1) + d_G(a_n) \geq v(G) - 1 \geq n$  и цикл существует по лемме 1 в графе  $G$  есть цикл  $Z$  из  $n$  вершин.

- Так как граф связан, существует не вошедшая в этот цикл вершина, смежная хотя бы с одной из вершин цикла. Тогда и путь на  $n + 1$  вершине, противоречие. Таким образом, в графе есть ГП.

2) • Гамильтонов путь в графе уже есть по пункту 1.

Пусть  $n = v(G)$  и это путь  $a_1 \dots a_n$ .

- Если вершины  $a_1$  и  $a_n$  смежны, то  $a_1 \dots a_n$  — ГЦ. Если  $a_1 a_n \notin E(G)$ , то  $d_G(a_1) + d_G(a_n) \geq v(G) = n$  и ГЦ есть по Лемме 1. □



А теперь приведем прямое следствие теоремы Оре.

## Следствие

**(G. A. Dirac, 1952.)** 1) Если  $\delta(G) \geq \frac{v(G)-1}{2}$ , то в графе  $G$  есть гамильтонов путь.

2) Если  $\delta(G) \geq \frac{v(G)}{2}$ , то в графе  $G$  есть гамильтонов цикл.

### Лемма 2

Пусть  $ab \notin E(G)$ ,  $d_G(a) + d_G(b) \geq v(G)$ . Тогда граф  $G$  — гамильтонов, если и только если граф  $G + ab$  — гамильтонов.

### Доказательство.

$\Rightarrow$ . Очевидно.

$\Leftarrow$ . • Пусть граф  $G + ab$  — гамильтонов. Если ГЦ в графе  $G + ab$  не проходит по ребру  $ab$ , то этот цикл есть и в графе  $G$ .

• Пусть ГЦ в графе  $G + ab$  проходит по ребру  $ab$ . Тогда в графе  $G$  есть гамильтонов  $ab$ -путь. По лемме 1 в графе  $G$  существует ГЦ. □

## Замыкание графа: метод Хватала

### Определение

Рассмотрим произвольный граф  $G$ . Если существуют две несмежные вершины  $a, b \in V(G)$ , для которых  $d_G(a) + d_G(b) \geq v(G)$ , то добавим в граф ребро  $ab$ . Далее продолжим процесс с полученным графом, и так далее, до тех пор, пока это возможно. Полученный в результате граф назовем *замыканием* графа  $G$  и обозначим через  $C(G)$ .

- Непосредственно из леммы 2 следует достаточно интересный результат:

### Следствие

*(V. Chvatal, 1974.) Граф  $G$  гамильтонов, если и только если его замыкание  $C(G)$  — гамильтонов граф.*

- Найти гамильтонов цикл в замыкании обычно гораздо проще, чем в исходном графе.

### Лемма 3

*Замыкание графа  $G$  определено однозначно (не зависит от порядка добавления рёбер).*

### Доказательство.

- Пусть в результате двух разных цепочек добавления рёбер были получены различные графы  $G_1$  и  $G_2$ .
- Тогда есть ребра, добавленные при построении  $G_1$ , которых не добавили при построении  $G_2$ . Рассмотрим такое ребро  $ab$ , добавленное самым первым.
- Пусть  $G_0$  — граф, к которому добавили  $ab$ . Тогда  $d_{G_0}(a) + d_{G_0}(b) \geq v(G)$ .
- Однако, все рёбра, которые добавили к  $G$  при построении  $G_0$ , добавлены и при построении  $G_2$  (мы так выбрали ребро  $ab!$ ). Поэтому,  $d_{G_2}(a) + d_{G_2}(b) \geq v(G)$ , а значит, процесс построения замыкания, давший нам  $G_2$ , не закончен: нужно добавить ребро  $ab$ . Противоречие.  $\square$

## Критерий Хватала

### Теорема 3

**(V. Chvatal, 1972)** Пусть  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  — последовательность степеней вершин графа  $G$ , а для каждого  $i \in [1..n - 1]$  выполняется неравенство  $d_i + d_{n-i} \geq n$ . Тогда граф  $G$  — гамильтонов.

### Доказательство.

- Докажем, что замыкание  $C(G)$  — гамильтонов граф.
- Пусть  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ , причем  $d_G(v_i) = d_i$ . При  $i + j \geq n$

$$d_G(v_i) + d_G(v_j) = d_i + d_j \geq d_i + d_{n-i} \geq n,$$

следовательно, вершины  $v_i$  и  $v_j$  смежны в  $C(G)$ .

- Теперь легко построить ГЦ в  $C(G)$ .

При  $n = 2m + 1$  он будет иметь вид

$$v_1 v_{2m} v_2 v_{2m-1} \dots v_m v_{m+1} v_{2m+1}.$$

При  $n = 2m$  цикл будет иметь вид

$$v_1 v_{2m-1} v_2 v_{2m-2} \dots v_{m-1} v_{m+1} v_m v_{2m}.$$



### Определение

Для графа  $G$  и натурального числа  $d$  обозначим через  $G^d$  граф на вершинах из  $V(G)$ , в котором вершины  $x$  и  $y$  смежны тогда и только тогда, когда  $\text{dist}_G(x, y) \leq d$ .

### Теорема 4

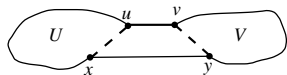
(G. Chartrand, S. F. Kapoor, 1969.) Для любого связного графа  $G$  с  $v(G) \geq 3$  и ребра  $e \in E(G)$  в графе  $G^3$  существует гамильтонов цикл, содержащий ребро  $e$ .

**Доказательство.** • Достаточно доказать теорему для случая, когда  $G$  — дерево (иначе выделим остовное дерево, содержащее ребро  $e$ ).

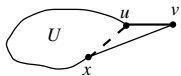
• Мы докажем утверждение индукцией по количеству вершин. База для дерева на трех или четырех вершинах очевидна (тогда  $G^3$  — это полный граф).

## Доказательство теоремы Чартранда-Капура: переход

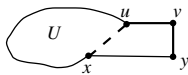
- Пусть для меньших чем  $G$  всех деревьев теорема доказана.
- Пусть  $e = uv$ , тогда в графе  $G - uv$  две компоненты связности  $U \ni u$  и  $V \ni v$ . Пусть  $G_u = G(U)$  и  $G_v = G(V)$ . НУО  $|U| \geq 3$ . Тогда в  $G_u^3$  есть ГЦ, содержащий инцидентное  $u$  ребро  $ux \in E(G)$ .
- Если  $|V| \geq 3$ , то аналогично мы построим ГЦ в графе  $G_v^3$ , содержащий инцидентное вершине  $v$  ребро  $vy \in E(G)$  и соединим эти два цикла в один, заменив рёбра  $ux$  и  $vy$  на  $uv$  и  $xu$ , см. рисунок а (из  $\text{dist}_G(x, y) = 3$  следует  $xu \in E(G^3)$ ).



а



б



с

Остаются очевидные случаи, когда  $|V| < 3$ . При  $V = \{v\}$  мы заменим в ГЦ графа  $G_u^3$  ребро  $ux$  на  $uv$  и  $vx$  (рис. б). При  $V = \{v, y\}$ , очевидно,  $vy \in E(G)$  и мы заменим в ГЦ графа  $G_u^3$  ребро  $ux$  на  $uv$ ,  $vy$  и  $xu$  (рис. с). □

Материалы курса можно найти вот здесь:

`logic.pdmi.ras.ru/~dvk/ITMO/`