Теория графов. Глава 3. Паросочетания.

Д. В. Карпов

2023

Определение

1) Множество вершин $U \subset V(G)$ называется *независимым*, если никакие две его вершины не смежны. Обозначим через $\alpha(G)$ количество вершин в максимальном независимом множестве графа G.

2) Множество рёбер $M \subset E(G)$ называется *паросочетанием*, если никакие два его ребра не имеют общей вершины. Обозначим через $\alpha'(G)$ количество рёбер в максимальном паросочетании графа G.

3) Будем говорить, что множество вершин $W \subset V(G)$ *покрывает* ребро $e \in E(G)$, если существует вершина $w \in W$, инцидентная e. Будем говорить, что множество рёбер $F \subset E(G)$ *покрывает* вершину $v \in V(G)$, если существует ребро $f \in F$, инцидентное v.

4) Паросочетание M графа G называется *совершенным*, если оно покрывает все вершины графа.

Определение

5) Множество вершин $W \subset V(G)$ называется *вершинным покрытием*, если оно покрывает все рёбра графа. Обозначим через $\beta(G)$ количество вершин в минимальном вершинном покрытии графа G.

6) Множество рёбер $F \subset E(G)$ называется *рёберным покрытием*, если оно покрывает все вершины графа. Обозначим через $\beta'(G)$ количество рёбер в минимальном рёберном покрытии графа G.

Соотношения между α, β, α' и β'

Лемма 1

1) $U \subset V(G)$ — *независимое множество, если и только если* $V(G) \setminus U$ — *вершинное покрытие.*
2) $\alpha(G) + \beta(G) = v(G)$.

Доказательство.

2) $U \subset V(G)$ — максимальное независимое множество, если и только если $V(G) \setminus U$ — минимальное вершинное покрытие.

Соотношения между α, β, α' и β'

Теорема 1

(T. Gallai, 1959). *Пусть G — граф с $\delta(G) > 0$. Тогда $\alpha'(G) + \beta'(G) = v(G)$.*

Доказательство. $\leq$.

• Пусть M — максимальное паросочетание, U — множество не покрытых M вершин графа, тогда $|U| = v(G) - 2\alpha'(G)$.

• Так как $\delta(G) > 0$, можно выбрать множество F из $|U|$ рёбер, покрывающее U.

• Тогда $M \cup F$ — покрытие, следовательно, $\beta'(G) \leq |M \cup F| = \alpha'(G) + v(G) - 2\alpha'(G)$, откуда $\alpha'(G) + \beta'(G) \leq v(G)$.

Доказательство теоремы Галлаи. $\geq$.

- Пусть L — минимальное рёберное покрытие ($|L| = \beta'(G)$), а $H = (V(G), L)$.
- Так как в графе H нет вершин степени 0, в каждой компоненте графа H можно выбрать по ребру, в результате получится паросочетание N в графе H (а значит, и в G).
- Следовательно, $\alpha'(G) \geq |N| = c(H)$ и

$$\beta'(G) = |L| = e(H) \geq v(H) - c(H) = v(G) - c(H) \geq v(G) - \alpha'(G),$$

откуда следует $\alpha'(G) + \beta'(G) \geq v(G)$. $\square$

Чередующиеся и дополняющие пути

Определение

Пусть M — паросочетание в графе G.
1) Назовём путь *M-чередующимся*, если в нём чередуются рёбра из M и рёбра, не входящие в M.
2) Назовём M-чередующийся путь *M-дополняющим*, если его начало и конец не покрыты паросочетанием M.

• В M-дополняющем пути нечётное число рёбер, причем рёбер из паросочетания M на одно меньше, чем рёбер, не входящих в M.

Теорема 2

(C. Berge, 1957.) *Паросочетание M в графе G является максимальным тогда и только тогда, когда нет M-дополняющих путей.*

Доказательство теоремы Бержа

$\Rightarrow$. • Пусть в графе G существует M-дополняющий путь $S = a_1a_2\dots a_{2k}$.

• Тогда заменим входящие в M рёбра $a_2a_3, \dots, a_{2k-2}a_{2k-1}$ на не входящие в M рёбра a_1a_2, $a_3a_4, \dots, a_{2k-1}a_{2k}$, и тем самым получим большее паросочетание. Противоречие.

$\Leftarrow$. • Пусть M — не максимальное паросочетание, тогда рассмотрим максимальное паросочетание M', $|M'| > |M|$.

• Пусть $N = M \bigtriangleup M'$, $H = G(N)$. Для любой вершины $v \in V(H)$ мы имеем $d_H(v) \in \{1, 2\}$, следовательно, H — объединение нескольких путей и циклов.

• В каждом из этих путей и циклов рёбра паросочетаний M и M' чередуются. Так как рёбер из M' в $E(H)$ больше, хотя бы одна компонента P графа H — путь нечётной длины, в котором больше рёбер из M'. Легко понять, что P — это M-дополняющий путь. Противоречие $\square$

Паросочетания в двудольном графе

• Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ — двудольный граф с долями V_1 и V_2.

Теорема 3

(P. Hall, 1935.) *В двудольном графе G есть паросочетание, покрывающее все вершины доли V_1, если и только если для любого множества $U \subset V_1$ выполняется $|U| \leq |\mathrm{N}_G(U)|$.*

• Условие о размере окрестности из теоремы Холла мы будем называть *условием Холла* для доли V_1.

Доказательство. $\Rightarrow$. Очевидно, так как концы рёбер паросочетания, покрывающих вершины из U — разные вершины из $\mathrm{N}_G(U)$.

$\Leftarrow$. Индукция по количеству вершин в графе. База для $|V_1| = 1$ очевидна. Предположим, что для меньшего чем G графа утверждение уже доказано. Разберём два случая.

Доказательство теоремы Холла. Случай 1: существует такое непустое множество $A \subsetneq V_1$, что $|A| = |\mathrm{N}_G(A)|$.

• Введём обозначения $B = \mathrm{N}_G(A)$, $A' = V_1 \setminus A$, $B' = V_2 \setminus B$. Пусть $G_1 = G(A \cup B)$, $G_2 = G(A' \cup B')$.

• Очевидно, для двудольного графа G_1 и его доли A выполняется условие Холла. По индукционному предположению в графе G_1 существует паросочетание M_1, покрывающее A.

• Проверим условие Холла для двудольного графа G_2 и его доли A'. Рассмотрим $U \subset A'$. Тогда $|U| + |A| = |U \cup A| \le |\mathrm{N}_G(U \cup A)| = |\mathrm{N}_{G_2}(U) \cup B| = |\mathrm{N}_{G_2}(U)| + |B| = |\mathrm{N}_{G_2}(U)| + |A|$, откуда следует $|U| \le |\mathrm{N}_{G_2}(U)|$.

• Значит, в графе G_2 существует паросочетание M_2, покрывающее все вершины из A'. Тогда $M_1 \cup M_2$ — паросочетание в G, покрывающее V_1.

Доказательство теоремы Холла. Случай 2: для любого непустого множества $A \subsetneq V_1$ выполняется $|\mathrm{N}_G(A)| > |A|$.

- Рассмотрим произвольную вершину $a \in V_1$ и смежную с ней вершину $b \in V_2$.
- Пусть $G' = G - a - b$. Проверим условие Холла для двудольного графа G' и его доли $V_1 \setminus \{a\}$. Для любого множества $A \subset V_1 \setminus \{a\}$ выполняется $|A| \le |\mathrm{N}_G(A)| - 1 \le |\mathrm{N}_G(A) \setminus \{b\}| = |\mathrm{N}_{G'}(A)|$.
- Поэтому в графе G' существует паросочетание, покрывающее $V_1 \setminus \{a\}$. Вместе с ребром ab получаем искомое паросочетание. $\square$

Следствия из теоремы Холла.

Следствие 1

В двудольном графе $G = (V_1, V_2, E)$ все вершины из V_1 имеют степени не меньше k, а все вершины V_2 имеют степени не больше k. Тогда есть паросочетание, покрывающее V_1.

Доказательство.

• Достаточно проверить условие Холла для доли V_1. Пусть $A \subset V_1(G)$, тогда из вершин A выходит не менее чем $k \cdot |A|$ рёбер к вершинам из $\mathrm{N}_G(A)$, а в каждую вершину $b \in \mathrm{N}_G(A)$ входит не более, чем k рёбер из вершин множества A.

• Таким образом, $k|A| \le e_G(A, N_G(A)) \le k|N_G(A)|$, откуда $|A| \le |N_G(A)|$. □

Следствия из теоремы Холла.

Следствие 2

(D. König, 1916.) *Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ — регулярный двудольный граф степени k. Тогда G есть объединение k своих совершенных паросочетаний.*

Доказательство.

• По Следствию 1 в G существует паросочетание M, покрывающее V_1.

• Так как степени всех вершин равны по k, а каждое ребро соединяет V_1 и V_2, мы имеем $k|V_1| = e(G) = k|V_2|$.

• Следовательно, $|V_1| = |V_2|$. Поэтому, паросочетание M покрывает и долю V_2, то есть, M — совершенное.

• $G - M$ — регулярный двудольный граф степени $k - 1$. Продолжая выделять совершенные паросочетания, мы разобьём граф G на k паросочетаний. $\square$

Теорема о гареме

Теорема 4

В одной далекой стране проживают юноши $\{A_1, \dots, A_n\}$. Для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$, юноша A_i хочет завести гарем из k_i знакомых ему девушек (естественно, $k_i \in \mathbb{N}$). Докажите, что они могут это одновременно сделать тогда и только тогда, когда для любого множества юношей количество знакомых хотя бы одному из них девушек не меньше, чем сумма желаемых ими размеров гаремов.

Доказательство. • Построим двудольный граф $G = (V_1, V_2, E)$.

• Вершины доли V_1 соответствуют юношам — каждому A_i соответствует k_i вершин $a_{i,1}$, ..., a_{i,k_i} (назовем их копиями A_i).

• Вершины доли V_2 соответствуют девушкам. Каждая вершина $a_{i,j} \in V_1$ соединена в точности с теми девушками из V_2, с которыми знаком юноша A_i.

• Проверим, что для доли V_1 выполнено условие Холла.

• Пусть $M \subset V_1$, а $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ — все юноши, чьи копии есть в M.

• Тогда $|\mathrm{N}_G(M)| \ge k_{i_1} + \dots + k_{i_m}$ (в $\mathrm{N}_G(M)$ входят все девушки, знакомые с $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$).

• В то же время, $|M| \le k_{i_1} + \dots + k_{i_m}$ (в M не может входить больше копий $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$, чем их существует).

• Таким образом, в G есть паросочетание, покрывающее V_1.

• Для каждого A_i девушки, входящие в пары с его копиями, образуют гарем желаемого размера. $\square$

Теорема 5

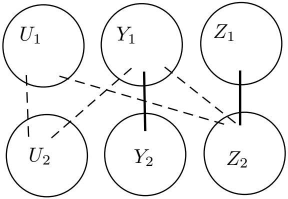
(D. König, 1931.) *Пусть G — двудольный граф. Тогда $\alpha'(G) = \beta(G)$.*

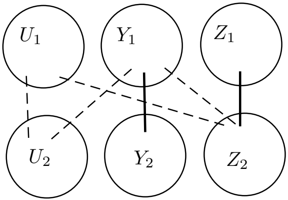
Доказательство. $\le$. • Так как рёбра паросочетания не имеют общих концов, в любом вершинном покрытии не меньше вершин, чем в любом паросочетании рёбер. Следовательно, $\alpha'(G) \le \beta(G)$.

$\geq$ • Пусть M — максимальное паросочетание в графе G, U_1 — множество всех непокрытых этим паросочетанием вершин V_1, U_2 — множество непокрытых M вершин V_2.

• Разобьём все покрытые паросочетанием M вершины V_1 на два множества: Y_1 — те вершины, до которых можно дойти от U_1 по M-чередующимся путям, а Z_1 — вершины, до которых дойти таким образом нельзя.

• Разобьём все покрытые паросочетанием M вершины $V_2(G)$ на два множества: Y_2 — те вершины, до которых можно дойти от U_1 по M-чередующимся путям, а Z_2 — вершины, до которых дойти таким образом нельзя.

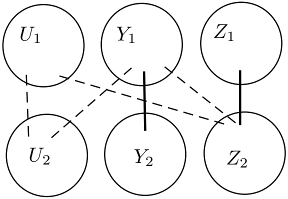




• Выясним, как должны проходить рёбра паросочетания M и остальные рёбра графа G между определенными выше множествами вершин. На рисунке сплошными линиями показаны рёбра паросочетания M, пунктирными линиями — невозможные рёбра. Далее мы объясним, почему граф устроен именно так.

• Любой M-чередующийся путь приходит в вершины множества Y_1 по ребрам из M, поэтому предыдущая вершина перед Y_1 на таком пути должна лежать в Y_2.

• Рёбра паросочетания M не могут соединять Y_2 с Z_1 (иначе был бы M-чередующийся путь от U_1 до Z_1). Следовательно, паросочетание M соединяет друг с другом Y_1 и Y_2 а также Z_1 и Z_2.



Докажем, что $B = Z_1 \cup Y_2$ — вершинное покрытие.

• $E_G(U_1 \cup Y_1, Z_2) = \varnothing$. (Рёбра не из M не могут соединять вершины из $U_1 \cup Y_1$ с вершинами из Z_2: иначе был бы M-чередующийся путь от U_1 до Z_2.)

• $E_G(U_1 \cup Y_1, U_2) = \varnothing$. (Если бы такое ребро существовало, то существовал бы M-дополняющий путь, что по теореме Бержа для максимального паросочетания M невозможно.)

Так как B — вершинное покрытие и $|M| = |B|$, имеем $\alpha'(G) \ge \beta(G)$. $\square$

Следствие из теорем Кенига и Галлаи

Следствие

Пусть G — двудольный граф с $\delta(G) > 0$. Тогда $\alpha(G) = \beta'(G)$.

Доказательство.

• *По Теореме 5 для двудольного графа выполняется соотношение $\alpha'(G) = \beta(G)$.*

• *По Лемме 1 и Теореме 1 мы имеем $\alpha(G) + \beta(G) = v(G) = \alpha'(G) + \beta'(G)$, откуда немедленно следует доказываемое утверждение.* $\square$

Паросочетания с предпочтениями

• Иногда вершинам не всё равно, с какими вершинами "вступать в паросочетание". Предположим, что каждая вершина имеет список предпочтений, то есть, упорядочивает инцидентные ей рёбра. Наша задача — построить такое паросочетание M (не обязательно максимальное), что в нём не будет ребра $e = ab$, которое обе вершины a и b хотели бы поменять на свободные рёбра. Дадим строгие определения.

Определение

1) Пусть для каждой вершины $v \in V(G)$ задано линейное отношение (нестрогого) порядка $\le_v$ на множестве всех инцидентных v рёбер из $E(G)$. Тогда $\le \; = \{\le_v\}_{v \in V(G)}$ — *множество предпочтений*.

2) Паросочетание M называется *стабильным* для множества предпочтений $\le$, если для любого ребра $f \notin M$ существует такое ребро $e \in M$, что e и f имеют общий конец v и $f \le_v e$.

Stable marriage theorem

Теорема 5

(D. Gale, L. Shapley, 1962.) *Пусть G — двудольный граф. Тогда для любого множества предпочтений $\leq$ в графе G существует стабильное паросочетание.*

Доказательство. • Будем считать вершины одной доли мужчинами, а вершины другой доли — женщинами, а наше паросочетание будет состоять из семейных пар. Изначально наше паросочетание пусто, оно будет изменяться пошагово. Опишем шаг алгоритма изменения паросочетания.

Шаг алгоритма построения стабильного паросочетания

- Сначала действуют мужчины:
каждый *неженатый* (то есть, не покрытый паросочетанием) мужчина выбирает женщину, которая ему больше всех нравится (то есть, наивысшую в своем предпочтении) из тех, которым он еще не делал предложения (если такие есть), после чего делает ей предложение.

- Затем действуют женщины:
каждая из них рассматривает всех мужчин, кто сделал ей предложение и нравится ей строго больше, чем ее муж (если он есть). Если это множество непусто, она выбирает из них того, кто нравится ей больше всего (если таких несколько, то любого из них) и выходит за него замуж (вместо ее прежнего мужа, если он был).

• Конечность алгоритма очевидна: никакой мужчина не делает предложение одной женщине дважды. Пусть в результате получилось паросочетнание M.

• Докажем, что M стабильно. Рассмотрим любое ребро $uw \in E(G) \setminus M$ (где u — мужчина).

• Если u делал предложение w, но либо w ему отказала, либо сначала приняла предложение, но потом бросила, то w нашла мужа u', который ей нравится не меньше, чем u (то есть, существует ребро $u'w \in M$, для которого $uw \le_w u'w$).

• Если же u не делал предложения w, то в процессе алгоритма нашел жену w', которая нравится ему не меньше, чем w (то есть, существует ребро $uw' \in M$, для которого $uw \le_u uw'$).

• Таким образом, построеннное паросочетание стабильно. $\square$

Паросочетание в произвольном графе

Определение

Для произвольного графа G через $o(G)$ обозначим количество нечётных компонент связности графа G (то есть, компонент связности, содержащих нечётное число вершин).

Теорема 7

(W. T. Tutte, 1947.) *В графе G существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого $S \subset V(G)$ выполняется условие $o(G - S) \le |S|$.*

Доказательство. $\Rightarrow$. Необходимость условия почти очевидна. Пусть $S \subset V(G)$, а M — совершенное паросочетание. Тогда одна из вершин каждой нечетной компоненты связности графа $G - S$ должна быть соединена с вершиной из S ребром паросочетания M, и все эти вершины — разные!

Доказательство теоремы Татта. $\Leftarrow$.

$\Leftarrow$. • Предположим, что граф удовлетворяет условию, но не имеет совершенного паросочетания. Тогда, в частности, $o(G) \le |\varnothing| = 0$, то есть, $v(G)$ чётно.

• Пусть G^* — максимальный надграф G на том же множестве вершин, не имеющий совершенного паросочетания. Мы построим совершенное паросочетание в G^* и придем к противоречию.

• Для любого $S \subset V(G)$ очевидно, выполняется неравенство $o(G^* - S) \le o(G - S) \le |S|$.

• Пусть $U = \{u \in V(G) : d_{G^*}(u) = v(G) - 1\}$. Очевидно, G^* — не полный граф, поэтому $U \ne V(G)$.

Утверждение

Граф $G^* - U$ — объединение нескольких несвязанных друг с другом полных графов.

Доказательство. • Предположим, что это не так. Тогда существуют такие вершины $x, y, z \in V(G) \setminus U$, что $xy, yz \in E(G^*)$, но $xz \notin E(G^*)$.

• Так как $y \notin U$, существует такая вершина $w \notin U$, что $yw \notin E(G^*)$.

• Ввиду максимальности графа G^* существует совершенное паросочетание M_1 в графе $G^* + xz$ и совершенное паросочетание M_2 в графе $G^* + yw$. Так как в графе G^* нет совершенного паросочетания, $xz \in M_1$ и $yw \in M_2$.

• Пусть $H = (V(G), M_1 \triangle M_2)$. Очевидно, граф H — несвязное объединение чётных циклов, в каждом из которых чередуются рёбра паросочетаний M_1 и M_2.

• Рёбра xz и yw принадлежат ровно одному из паросочетаний M_1 и M_2, и потому лежат в $E(H)$.

• На вершинах любой компоненты связности графа H существует совершенное паросочетание с рёбрами из M_1 и совершенное паросочетание с рёбрами из M_2.

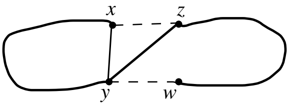
• Рассмотрим два случая.

Случай 1. Рёбра xz и yw лежат в разных компонентах C_1 и C_2 графа H

• Тогда на вершинах C_1 мы выберем рёбра паросочетания M_2, на вершинах C_2 мы выберем рёбра паросочетания M_1, а в остальных компонентах графа H — любое из этих паросочетаний.

• В итоге получится совершенное паросочетание графа G^*, противоречие.

Случай 2. Рёбра xz и yw лежат в одной компоненте C графа H.



• В силу симметричности x и z можно считать, что вершины расположены в чётном цикле C в порядке $ywzx$ (см. рисунок).

• Рассмотрим простой путь $P = xCyzCw$, состоящий из двух дуг цикла C и ребра yz. Тогда $V(P) = V(C)$ и $E(P) \subset E(G^*)$. Следовательно, существует совершенное паросочетание $M_C \subset E(G^*)$ на вершинах компоненты связности W.

• В остальных компонентах графа H выберем рёбра любого из паросочетаний M_1 и M_2. В итоге получится совершенное паросочетание графа G^*, противоречие. $\square$

Конец доказательства теоремы Татта

• Граф $G^* - U$ есть объединение нескольких несвязанных полных графов. В силу условия, среди них не более чем $|U|$ имеет нечетное число вершин.

• В каждой чётной компоненте графа $G^* - U$ мы построим полное паросочетание, в каждой нечётной компоненте — паросочетание, покрывающее все вершины, кроме одной, а оставшуюся вершину соединим с вершиной из U (при этом мы используем различные вершины множества U: их хватит ввиду $o(G^* - U) \leq |U|$).

• Наконец, мы разобём на пары оставшиеся непокрытыми вершины множества U: это можно сделать, так как каждая из этих вершин смежна в графе G^* со всеми остальными. Таким образом, мы получили совершенное паросочетание в графе G^*, противоречие. □

Совершенное паросочетание в кубическом графе

• Граф, все вершины которого имеют степень 3, называется *кубическим*.

• *Мост* графа — ребро, не входящее ни в один цикл.

• В 1891 году Петерсен доказал, что в кубическом графе без мостов есть совершенное паросочетание. Доказательство было весьма непростым, но имея столь серьёзное средство, как теорема Татта, мы докажем даже более сильное утверждение намного проще.

Теорема 8

(J. Petersen, 1891.) *Пусть G — связный кубический граф, в котором не более двух мостов. Тогда в графе G есть совершенное паросочетание.*

Доказательство теоремы 8

• Предположим, что совершенного паросочетания в G нет. Тогда по Теореме 7 существует такое множество $S \subset V(G)$, что $o(G - S) > |S|$.

• Так как в кубическом графе четное число вершин, $S \neq \varnothing$ и $o(G - S) \equiv |S| \pmod 2$.

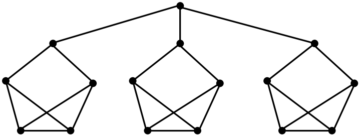
• Пусть $U_1, \dots, U_n$ — все нечётные компоненты связности графа $G - S$. Тогда $n \geq |S| + 2$.

• Пусть $m_i = e_G(U_i, S)$. Тогда $m_i = (\sum_{v \in U_i} d_G(v)) - 2e(G(U_i)) = 3|U_i| - 2e(G(U_i))$ — очевидно, нечетно.

• Так как не более чем два ребра графа G — мосты, то не более, чем два числа из $m_1, \dots, m_n$ равны 1, а все остальные — не менее, чем 3.

• Тогда $3|S| = \sum_{v \in S} d_G(v) \geq \sum_{i=1}^{n} m_i \geq 3n - 4 \geq 3(|S| + 2) - 4 > 3|S|$, противоречие. $\square$

Результат теоремы 8 в некотором смысле наилучший возможный: легко придумать связный кубический граф с тремя мостами, у которого нет совершенного паросочетания.



Факторы регулярного графа

Определение

k-фактором графа G называется его остовный регулярный подграф степени k.

• Совершенное паросочетание — это 1-фактор.
Следующая теорема, очень похожая по формулировке, говорит о наличии 2-фактора.

Теорема 9

(J. Petersen, 1891.) *У регулярного графа степени $2k$ есть 2-фактор.*

Доказательство. • Граф G имеет эйлеров цикл. Обойдем его в некотором направлении и ориентируем каждое ребро в направлении обхода. Тогда в каждую вершину $\overline{G}$ входит и выходит ровно по k стрелок.

• Построим граф G^* следующим образом. Разделим каждую вершину $v \in V(G)$ на две вершины v_1 и v_2. Если ребро $xy \in E(G)$ ориентировано в обходе ЭЦ от x к y, то прведем в графе G^* ребро x_1y_2.

• Таким образом, существует биекция $\varphi : E(G) \to E(G^*)$, заданная правилом $\varphi(xy) = x_1y_2$.

• G^* — регулярный двудольный граф степени k с долями $\{v_1\}_{v\in V(G)}$ и $\{v_2\}_{v\in V(G)}$.

• По следствию 2 в графе G^* есть совершенное паросочетание M^*.

• Пусть $M = \varphi^{-1}(M^*)$ (M состоит из рёбер графа G — прообразов рёбер M^* при биекции φ).

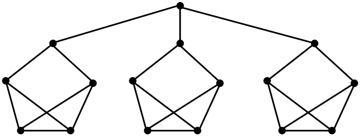
• Для любой вершины $x \in V(G)$ каждая из вершин $x_1, x_2 \in V(G^*)$ инцидентна ровно одному ребру из M^*. Поэтому x инцидентна ровно двум рёбрам из M, то есть, M — это 2-фактор графа G. $\square$

Следствие

1) *Регулярный граф степени* $2k$ *есть объединение* k *своих* 2*-факторов.*

2) *Для любого* $r \leq k$ *регулярный граф степени* $2k$ *имеет* $2r$*-фактор.*

• Все остальные утверждения вида “у регулярного графа степени k есть фактор степени r” без дополнительных условий на граф, увы, неверны.



Теорема о почти регулярном факторе почти регулярного графа

Теорема 10

(C. Thomassen, 1981.) *Пусть G — граф, степени всех вершин которого равны k или $k+1$, а $r < k$. Тогда существует остовный подграф H графа G, степени всех вершин которого равны либо r, либо $r+1$.*

Доказательство. • Спуск по r. *База* для $r = k$ очевидна, в этом случае подойдет $H = G$.

Переход $r \to r-1$.

• Пусть граф G имеет остовный подграф F, степени вершин которого равны r или $r+1$.

• Начиная с графа F, пока это возможно, будем производить следующую операцию: удалять ребро, соединяющее две вершины степени $r+1$. В результате получится подграф F' графа F, степени вершин которого равны r или $r+1$, в котором никакие две вершины степени $r+1$ не смежны.

• Пусть V_{r+1} — множество всех вершин степени $r+1$ в графе F'. Можно считать, что $V_{r+1} \neq \varnothing$, иначе граф F' нам подходит.

• Пусть $V_r = V(G) \setminus V_{r+1}$, а B — двудольный граф с долями V_{r+1} и V_r, ребра которого — это $E_{F'}(V_{r+1}, V_r)$.

• Для каждой вершины $x \in V_{r+1}$ мы имеем $d_B(x) = r+1$, а для каждой вершины $y \in V_r$ мы имеем $d_B(y) \leq r$.

• По Следствию 1 из теоремы Холла, в графе B существует паросочетание M, покрывающее все вершины из V_{r+1}.

• Степени всех вершин графа $H = F' - M$ равны r или $r-1$. $\square$

Множество Татта. Дефицит графа

• А что делать в случае, когда в графе нет совершенного паросочетания?

Определение

Пусть $S \subset V(G)$ таково, что $o(G - S) > |S|$. Мы будем называть S *множеством Татта* графа G.

• По теореме Татта, если в графе G нет совершенного паросочетания, то в нём есть хотя бы одно множество Татта.

Определение

Дефицитом графа G мы будем называть величину $\mathrm{def}(G) := v(G) - 2\alpha'(G)$.

• Дефицит графа G — это количество вершин, не покрытых максимальным паросочетанием графа G.

• Очевидно, $\mathrm{def}(G) = 0$ тогда и только тогда, когда в графе G есть совершенное паросочетание.

• Определение дефицита можно переписать в виде формулы для вычисления размера максимального паросочетания:

$$\alpha'(G) = \frac{v(G) - \mathrm{def}(G)}{2}.$$

Формула Бержа

Теорема 11

(C. Berge, 1958.) *Для любого графа G выполняется равенство*

$$\mathrm{def}(G) = \max_{S \subset V(G)} \big(o(G-S) - |S|\big).$$

Доказательство. $\ge$. • Пусть M — максимальное паросочетание графа G, $S \subset V(G)$, $n = o(G-S)$, а $U_1, \dots, U_n$ — все нечётные компоненты связности графа $G-S$.

• В каждой нечётной компоненте U_i существует хотя бы одна вершина u_i, которая не покрыта ребром M или покрыта ребром $e_i = u_i x_i \in M$, где $x_i \in S$.

• Следовательно, не менее, чем $n - |S|$ из вершин $u_1, \dots, u_n$ не покрыты паросочетанием M, откуда следует неравенство $\mathrm{def}(G) \ge o(G-S) - |S|$.

$\leq$. • Пусть

$$k = \max_{S\subset V(G)} \bigl(o(G-S) - |S|\bigr).$$

• Если $k = 0$, по Теореме Татта в графе G есть совершенное паросочетание и $\mathrm{def}(G) = 0$, этот случай тривиален.

• Пусть $k > 0$, W — множество из k новых вершин ($W \cap V(G) = \varnothing$), а граф H получен присоединением к G вершин множества W, причём каждая из вершин множества W будет смежна со всеми остальными вершинами графа H.

• Покажем, что для графа H выполняется условие Татта. Понятно, что $k \equiv v(G) \pmod 2$, поэтому $v(H) = v(G) + k$ чётно. Таким образом, достаточно проверить условие для непустых множеств $T \subset V(H)$.

• Если $T \not\supset W$, то граф $H - T$ связен и $o(H-T) \leq 1 \leq |T|$.

• Если $T = W \cup S$, где $S \subset V(G)$, то $o(H-T) = o(G-S) \leq k + |S| = |T|$.

- В обоих случаях условие Татта выполняется и по теореме Татта в графе H есть совершенное паросочетание N.
- Тогда в графе G существует такое паросочетание M, что $|M| \geq |N| - k$, следовательно,

$$\alpha'(G) \geq |M| = |N| - k = \frac{v(H)}{2} - k = \frac{v(G)+k}{2} - k = \frac{v(G)-k}{2},$$

откуда немедленно следует доказываемое неравенство. $\square$