Теория графов. Глава 4. Связность.

Д. В. Карпов

2023

Точки сочленения и блоки в связном графе

В этом разделе G — связный граф.

Определение

1) Вершина $a \in V(G)$ называется *точкой сочленения*, если граф $G - a$ несвязен.
2) *Блоком* называется любой максимальный по включению подграф графа G, не имеющий точек сочленения.

- В силу максимальности, блок графа G является индуцированным подграфом графа G на своем множестве вершин.
- Любой подграф без точек сочленения H графа G входит хотя бы в один блок (так как H можно дополнить до максимального подграфа без точек сочленения).

Определение

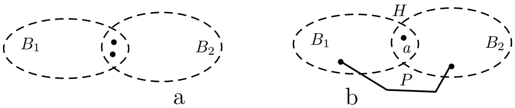
Блоки и *точки сочленения* несвязного графа — это блоки и точки сочленения его компонент.

- Далее мы будем рассматривать только связные графы.

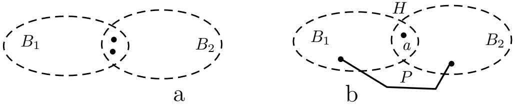
Лемма 1

Пусть B_1 и B_2 — два разных блока графа G, причём $V(B_1) \cap V(B_2) \neq \varnothing$. Тогда $V(B_1) \cap V(B_2)$ состоит из точки сочленения a графа G, причем a — единственная точка сочленения, отделяющая B_1 от B_2.

Доказательство. • Пусть $|V(B_1) \cap V(B_2)| \geq 2$. Тогда для любой вершины $x \in V(B_1 \cup B_2)$ граф $B_1 \cup B_2 - x$ связен (см. рис. a). Следовательно, $B_1 \cup B_2$ содержится в блоке B графа G, а B_1 является собственным подграфом B, что противоречит максимальности B_1.



• Далее пусть $V(B_1) \cap V(B_2) = \{a\}$. Так как a — общая вершина блоков B_1 и B_2, отделить B_1 от B_2 в графе G может только a.



• Если a не отделяет B_1 от B_2 в графе G, то в $G - a$ есть $V(B_1)V(B_2)$-путь P (см. рис. b).

• Пусть $H = B_1 \cup B_2 \cup P$. Граф $H - x$ связен для любой вершины $x \in V(H)$. Поэтому H содержится в одном блоке B графа G, а блок B_1 — собственный подграф B, противоречие.

• Итак, a — единственная вершина, которая отделяет B_1 от B_2 в графе G. Следовательно, граф $G - a$ несвязен, то есть a — точка сочленения G. $\square$

• По Лемме 1 любой подграф без точек сочленения H графа G с $v(H) > 1$ входит ровно в один блок. В частности, любое ребро графа входит ровно в один блок.

• Если у связного графа G хотя бы две вершины, то каждая его вершина смежна хотя бы с одной другой вершиной. Следовательно, любой блок графа G содержит хотя бы две вершины.

Определение

• Построим граф $B(G)$, вершины которого соответствуют всем точкам сочленения $a_1, \dots, a_n$ графа G и всем его блокам $B_1, \dots, B_m$ (мы будем обозначать эти вершины так же, как и блоки). Вершины a_i и B_j будут смежны, если $a_i \in V(B_j)$. Других рёбер в этом графе нет.

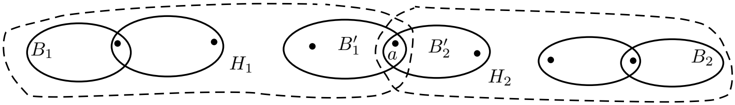
• Граф $B(G)$ называется *деревом блоков и точек сочленения* графа G.

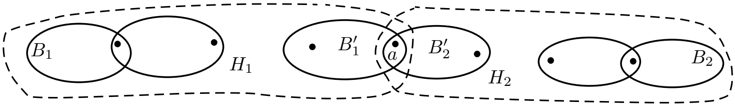
Лемма 2

Пусть B_1 и B_2 — два разных блока графа G, а P — путь между ними в графе $B(G)$. Тогда точки сочленения графа G, отделяющие B_1 от B_2 — это в точности те точки сочленения, что лежат на пути P. Остальные точки сочленения не разделяют даже объединение блоков пути P.

Доказательство. • Пусть x — точка сочленения графа G, не лежащая на пути P, а H — объединение всех блоков пути P.

• Для любого блока B пути P граф $B - x$ связен. Если B — не B_1 и не B_2, то в нем можно пройти между двумя точками сочленения, входящими в P (эти точки отличны от x). Поэтому $H - x$ — связный граф.





• Пусть a — точка сочленения, лежащая на P, и она входит в блоки B'_1 и B'_2 пути P (см. рисунок).

• Обозначим через H_1 объединение всех блоков, лежащих на пути P от B_1 до a, а через H_2 — объединение всех блоков, лежащих на пути P от a до B_2.

• По доказанному выше, a не разделяет ни один из графов H_1 и H_2.

• С другой стороны, по Лемме 1 точка сочленения a отделяет блок B'_1 от блока B'_2, а значит, a отделяет H_1 от H_2 и, в частности, B_1 от B_2. $\square$

Теорема 1

1) *Дерево блоков и точек сочленения связного графа G — это действительно дерево, все листья которого соответствуют блокам.*
2) *Точка сочленения a разделяет два блока B_1 и B_2 в графе G, если и только если a разделяет B_1 и B_2 в $B(G)$.*

Доказательство. 1)
$B(G)$ — связный граф.

• Для любых двух вершин $B(G)$ (не важно, блоков или точек сочленения) рассмотрим путь Q в G между ними.

• Путь Q перестраивается в путь в $B(G)$ так:

— участок пути Q, проходящий по одному блоку графа G, заменяем на соответствующую блоку вершину в $B(G)$;

— переход Q между различными блоками по лемме 1 осуществляется через их общую точку сочленения — вершину $B(G)$.

• Предположим, что в $B(G)$ есть простой цикл Z и рассмотрим подграф H — объединение всех блоков этого цикла.

• Между любыми двумя входящими в Z блоками есть два независимых пути в $B(G)$.

• По Лемме 2 граф H не имеет точек сочленения (они должны бы были лежать на двух путях без общих внутренних точек).

• Следовательно, существует блок B, содержащий H, а все (хотя бы два) блока цикла Z — собственные подграфы B, что невозможно.

• Таким образом, $B(G)$ — дерево.

• Если лист $B(G)$ соответствует точке сочленения a, то по Лемме 2 граф $G - a$ связен, противоречие.

2) В дереве $B(G)$ есть единственный путь между B_1 и B_2. По лемме 2 в точности точки сочленения с этого пути отделяют B_1 от B_2 в графе G. $\square$

Крайние блоки

Определение

1) Назовем блок B *крайним*, если он соответствует висячей вершине дерева блоков и точек сочленения.
2) *Внутренность* $\mathrm{Int}(B)$ блока B — это множество всех его вершин, не являющихся точками сочленения в графе G.

• Нетрудно понять, что блок недвусвязного графа G является крайним тогда и только тогда, когда он содержит ровно одну точку сочленения.

• Внутренность некрайнего блока может быть пустой. Внутренность крайнего блока всегда непуста.

• Если у связного графа G есть точки сочленения, то он имеет хотя бы два крайних блока.

• Если B — блок графа G, а $x \in \mathrm{Int}(B)$, то граф $G - x$ связен.

Лемма 3

Пусть B — крайний блок связного графа G, а $G' = G - \mathrm{Int}(B)$. Тогда граф G' связен, а блоки G' — это все блоки G, кроме B.

Доказательство.

• Пусть $a \in V(B)$ — точка сочленения, отрезающая крайний блок B от остального графа. Тогда $\mathrm{Int}(B)$ — это одна из компонент связности графа $G - a$, откуда очевидно следует связность графа G'.

• Все отличные от B блоки графа G являются подграфами G', не имеют точек сочленения и являются максимальными подграфами G' с таким свойством (они были максимальными даже в G). Следовательно, все они — блоки графа G'.

• Пусть B' — блок графа G'. Очевидно, $v(G') \geq 2$, поэтому B' содержит хотя бы одно ребро e, которое в графе G лежит в некотором блоке $B^* \neq B$. Теперь очевидно, что $B^* = B'$.

Разрез графа G по точке сочленения a.

• Пусть $U_1, \dots, U_k$ — все компоненты связности графа $G - a$, а $G_i = G(U_i \cup \{a\})$. Разрежем граф G на графы $G_1, \dots, G_k$.

Лемма 4

1) *Пусть $b \in U_i$. Тогда b разделяет вершины $x, y \in U_i$ в G_i, если и только если b разделяет их в G.*

2) *Все точки сочленения графов $G_1, \dots, G_k$ — это в точности все точки сочленения графа G, кроме a.*

Доказательство. 1) $\Leftarrow$. Если в $G - b$ нет xy-пути, то его, очевидно, нет и в $G_i - b$.

$\Rightarrow$. Наоборот, пусть x и y лежат в разных компонентах связности графа $G_i - b$. Не умаляя общности можно считать, что компонента связности $W \ni x$ не содержит a. Тогда W — компонента связности графа $G - b$, то есть, и в этом графе нет xy-пути.

Доказательство пункта 2 леммы 4 • Так как $G_i - a$ — компонента графа $G - a$, вершина a не является точкой сочленения ни в одном из графов $G_1, \dots, G_k$.

• Любая другая точка сочленения графа G лежит ровно в одном из графов $G_1, \dots, G_k$ и является в нем точкой сочленения по пункту 1.

• Также из пункта 1 следует, что других точек сочленения в графах $G_1, \dots, G_k$ нет. $\square$

Алгоритм разбиения связного графа на блоки

• Выберем точку сочленения a и разрежем по ней G — заменим граф G на полученные при этом графы $G_1, \dots, G_k$.

• Каждым следующим шагом мы будем брать один из имеющихся графов, выбирать в нем точку сочленения и разрезать его по ней.

• И так далее, пока хотя бы один из полученных графов имеет точку сочленения.

Теорема 2

В результате описанного выше алгоритма разрезания графа по точкам сочленения вне зависимости от порядка действий получатся блоки графа G.

Доказательство.

• По Лемме 4 мы вне зависимости от порядка действий проведем разрезы по всем точкам сочленения графа G и только по ним.
• Пусть B — блок графа G. Тогда в графе G множество $V(B)$ не было разделено ни одной из точек сочленения. Значит, по пункту 1 Леммы 4 множество $V(B)$ не было разрезано при нашем алгоритме.
• Так как в результате алгоритма получились индуцированные подграфы графа G, один из них — скажем, H — является надграфом B.
• Если $H \neq B$, то рассмотрим вершину $c \in V(H) \setminus V(B)$. В графе G существует точка сочленения a, отделяющая c от $V(B)$. Тогда в силу Леммы 4 при разрезе по a вершина c была отделена от блока B, противоречие. $\square$

Рекурсивный алгоритм построения дерева блоков и точек сочленения

- Выберем точку сочленения a и разрежем по ней G — заменим граф G на полученные при этом графы $G_1, \dots, G_k$.
- В каждом из графов $G_1, \dots, G_k$ построим деревья блоков и точек сочленения. Пусть, скажем, $B(G_i) = T_i$.
- В графе G_i по Лемме 4 вершина a не является точкой сочленения.
- Значит, по Лемме 1 в G_i есть единственный блок B_i, содержащий a.
- Построим дерево $B(G)$, присоединив к точке a деревья $T_1, \dots, T_k$ (дерево T_i присоединяем ребром aB_i).

Теорема 3

В результате описанного выше алгоритма будет построено дерево блоков и точек сочленения графа G.

Доказательство. • В качестве базы построения отметим, что граф без точек сочленения является своим единственным блоком и его дерево блоков и точек сочленения тривиально.

Шаг построения.

• Точка сочленения a должна быть соединена в точности с теми блоками графа G, которые ее содержат.

• Из алгоритма разбиения графа на блоки следует, что это в точности блоки $B_1, \dots B_k$.

• Любая другая точка сочленения b попала в одну из частей при разрезе графа G по a — скажем, в G_1.

• Тогда все блоки графа G, содержащие b, лежат в G_1 и являются блоками графа G_1 (это следует из алгоритма разбиения на блоки уже графа G_1).

• Следовательно, b соединена в T_1 (а значит, и в построенном нами объединенном дереве блоков) в точности с теми блоками, с которыми b должна быть соединена в $B(G)$. $\square$

• Из алгоритма построения дерева блоков и точек сочленения можно вывести его свойства (в частности, то, что это дерево и все его листья соответствуют блокам).

• Более того, из алгоритма понятно, что каждая точка сочленения a разделяет блоки в $B(G)$, если и только если она их разделяет в G, а $d_{B(G)}(a)$ равняется числу компонент связности графа $G - a$.

Определение

Граф G является двусвязным , если $v(G) \geq 3$ и граф не имеет точек сочленения.

• Блок связного графа, имеющий более двух вершин — двусвязный граф.

Теорема 4

Пусть G — двусвязный граф, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $v(G) = n_1 + n_2$. Тогда $G = G_1 \cup G_2$, где $v(G_1) = n_1$, $v(G_2) = n_2$ и оба графа G_1 и G_2 связные.

Доказательство. • Индукция по n_1.

• База $n_1 = 1$ очевидна: пусть G_1 состоит из одной вершины v_1, тогда граф $G_2 := G - v_1$ связен, так как G не имеет точек сочленения.

• Переход $n_1 \to n_1 + 1$. В этом случае $n_2 := v(G_2) \geq 2$.

• Пусть B — крайний блок G_2, а a — единственная входящая в B точка сочленения. (если G_2 не имеет точек сочленения, то $B = G_2$, a — любая вершина B).

• В $B-a$ есть вершина x, смежная с $V(G_1)$ (иначе a отделяет G_1 от $B-a$ в графе G, то есть, является точкой сочленения, которых нет).

• Тогда x — не точка сочленения графа G_2. Значит, $G_2' := G_2 - x$ связен и $v(G_2') = n_2 - 1$.

• Так как x смежна с G_1, граф G_1', полученный из G_1 добавлением x и всех ребер графа G от x к G_1, связен.

• $v(G_1') = n_1 + 1$. $\square$

Разделяющие множества

Определение. Пусть $X, Y \subset V(G)$, $R \subset V(G) \cup E(G)$.

1) Назовем множество R *разделяющим*, если граф $G - R$ несвязен.

2) Пусть $X \not\subset R$, $Y \not\subset R$. Будем говорить, что R *разделяет* множества X и Y (или, что то же самое, *отделяет* множества X и Y друг от друга), если никакие две вершины $v_x \in X$ и $v_y \in Y$ не лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.

• Любой неполный граф имеет *вершинное* разделяющее множество (состоящее только из вершин).

• Любой граф более чем из одной вершины имеет *реберное* разделяющее множество (состоящее только из ребер).

Определение. Граф G является *k-связным*, если $v(G) \geq k + 1$ и минимальное вершинное разделяющее множество в графе G содержит хотя бы k вершин.

Вершинная связность

Определение

1) Пусть $x, y \in V(G)$ — несмежные вершины. Обозначим через $\kappa_G(x, y)$ размер минимального множества $R \subset V(G)$ такого, что R разделяет x и y. Если x и y смежны, то положим $\kappa_G(x, y) = +\infty$. Назовем $\kappa_G(x, y)$ *связностью* вершин x и y.

2) Пусть $X, Y \subset V(G)$. Обозначим через $\kappa_G(X, Y)$ размер минимального множества $R \subset V(G)$ такого, что R разделяет X и Y. Если такого множества нет, то положим $\kappa_G(X, Y) = +\infty$.

- В k-связном графе G для любых двух множеств вершин $X, Y \subset V(G)$ выполнено $\kappa_G(X, Y) \geq k$.

Теорема Менгера

• Это, безусловно, самое известное утверждение о связности графов. Мы докажем теорему Менгера и некоторые родственные ей факты. Возможно, это не совсем справедливо, но на все эти утверждения, как правило, ссылаются одинаково — как на теорему Менгера.

• Мы докажем теорему Менгера в чуть более общей формулировке Гёринга (2000 г.).

Теорема 5

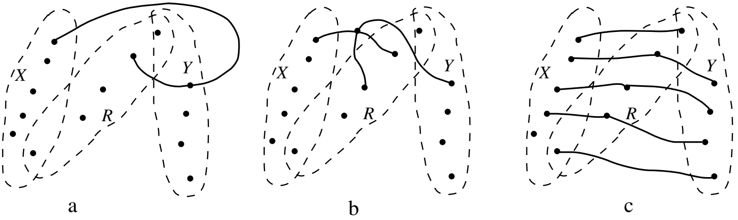
(K. Menger, 1927.) *Пусть* $X, Y \subset V(G)$, $\kappa_G(X, Y) \geq k$, $|X| \geq k$, $|Y| \geq k$. *Тогда в графе* G *существуют* k *непересекающихся* XY*-путей.*

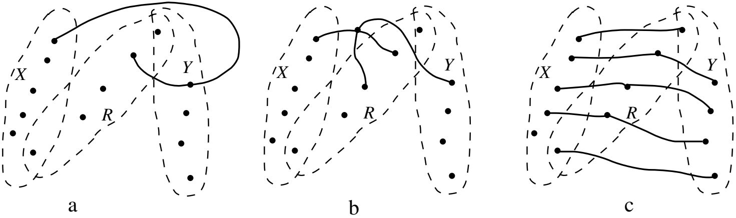
Доказательство. • Индукция по количеству вершин в графе. Доказывая утверждение для графа G и пары множеств X, Y, мы будем считать утверждение уже доказанным для всех меньших графов.

• Рассмотрим два случая.

Случай 1: существует множество R из k вершин, разделяющее X и Y

- Никакой XR-путь не содержит вершины из $Y \setminus R$ (иначе существовал бы XY-путь, не содержащий ни одной вершины множества R, см. рис a).
- Следовательно, любое множество S, отделяющее X от R в графе $G_x = G - (Y \setminus R)$, отделяет X от R и в графе G. Но тогда S отделяет X от Y в графе G, следовательно, $|S| \geq k$.





• По индукционному предположению существует k непересекающихся XR-путей в графе G_x, а следовательно, и в графе G.

• Аналогично, существует k непересекающихся RY-путей в графе G.

• Никакой XR-путь не пересекает никакой RY-путь (иначе существовал бы XY-путь, не содержащий ни одной вершины множества R, см. рис. b).

• Так как $|R| = k$, то мы можем состыковать XR-пути и RY-пути по вершинам множества R, получив k непересекающихся XY-путей (см. рис. c).

Случай 2: Нет множества из k вершин, разделяющего X и Y

- Случай, когда в графе G нет рёбер, очевиден.
- Далее $E(G) \neq \varnothing$. Пусть $xy \in E(G)$. Если условие теоремы выполняется в меньшем графе $G - xy$, то по индукционному предположению выполняется утверждение теоремы для графа $G - xy$, а следовательно, и для графа G.
- Остается рассмотреть случай, когда существует множество $T \subset V(G)$, $|T| \leq k - 1$, разделяющее X и Y в графе $G - xy$.
- Множества $X' = X \setminus T$ и $Y' = Y \setminus T$ непусты. Как мы знаем, $T^* = T \cup \{xy\}$ разделяет X и Y в графе G, а $T_x = T \cup \{x\}$ — не разделяет (так как $|T_x| \leq k$). Отсюда следует, что одно из множеств X' и Y' лежит в T_x.
- НУО $X' \subset T_x$. Тогда $X' = \{x\}$. Аналогично, $Y' = \{y\}$.
- Таким образом, $T \supset X \setminus \{x\}$ и $T \supset Y \setminus \{y\}$.
- Учитывая $|T| \leq k - 1$, $|X| \geq k$ и $|Y| \geq k$, мы получаем $X \setminus \{x\} = Y \setminus \{y\} = T$ и $|T| = k - 1$.
- В этом случае легко увидеть искомые пути — это ребро xy и $k - 1$ вершина из $T = X \cap Y$. $\square$

• Это и есть исходная формулировка теоремы Менгера, опубликованная им в 1927 году.

Следствие 1

Пусть вершины $x, y \in V(G)$ несмежны, $\kappa_G(x, y) \geq k$. Тогда существует k независимых путей из x в y.

Доказательство.

• Пусть $X = \mathrm{N}_G(x)$ и $Y = \mathrm{N}_G(y)$.

• Так как x и y несмежны, множество X отделяет вершину x от вершины y. Значит, $|X| \geq k$ и (аналогично) $|Y| \geq k$.

• Любой xy-путь идёт из x в X, далее в Y и затем в y. Поэтому, множество вершин R, отделяющее X от Y, отделяет вершину x от вершины y. Следовательно, $|R| \geq k$.

• По теореме 5 существует k непересекающихся XY-путей. Значит, есть и k независимых xy-путей. □

Следствие 2

Пусть $x \in V(G)$, $Y \subset V(G)$, $x \notin Y$, $k = \min(|Y|, \kappa_G(x, Y))$. *Тогда существуют* k *путей от* x *до различных вершин множества* Y, *не имеющих общих внутренних вершин.*

Доказательство.

• Пусть $X = \mathrm{N}_G(x)$. Очевидно, $|\mathrm{N}_G(x)| \geq k$.

• Так как $x \notin Y$, любое множество вершин R, отделяющее X от Y, отделяет вершину x от множества Y. Следовательно, $|R| \geq k$.

• Так как и $|Y| \geq k$, по Теореме 5 существует k непересекающихся XY-путей в графе G, а следовательно, и k непересекающихся путей от x до различных вершин множества Y. $\square$

Теорема 6

(H. Whitney, 1932.) *Пусть G — k-связный граф. Тогда для любых двух вершин $x, y \in V(G)$ существует k независимых xy-путей.*

Доказательство. • Индукция по k, база для $k = 1$ очевидна. Докажем утверждение для k-связного графа, считая, что оно доказано для графов меньшей связности.

• Если вершины x и y несмежны, то утверждение следует из Следствия 1. Далее вершины x и y смежны.

• Если $G - xy$ — $(k-1)$-связный граф, то по индукционному предположению существует $k-1$ независимых xy-путей в графе $G - xy$, а еще один путь — это ребро xy.

• Пусть в $G - xy$ существует разделяющее множество T, $|T| \le k - 2$. Так как T не является разделяющим множеством в G, легко понять, что в графе $G - (T \cup \{xy\})$ ровно две компоненты связности: $U_x \ni x$ и $U_y \ni y$ (возвращение ребра xy дает связный граф $G - T$).

• Пусть $T_x = T \cup \{x\}$. Если $U_x \neq \{x\}$, то T_x отделяет $U_x \setminus \{x\}$ от U_y в G, что невозможно (так как $|T_x| \le k - 1$).

• Тогда $U_x = \{x\}$. Аналогично, $U_y = \{y\}$. Таким образом, в графе G не более k вершин: это вершины множества T, x и y. Противоречие с определением k-связного графа. $\square$

Теорема 7

(G. A. Dirac.) *Пусть $k \geq 2$. В k-связном графе для любых k вершин существует простой цикл, содержащий все эти вершины.*

Доказательство. • Докажем теорему индукцией по k. База для $k = 2$ следует из теоремы Уитни (Теоремы 6).

Переход $k - 1 \to k$. • Пусть $k > 2$. Рассмотрим k-связный граф G и его вершины $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k$. Так как G является $(k-1)$-связным графом, по индукционному предположению существует простой цикл Z, содержащий вершины $v_1, \ldots, v_{k-1}$.

• Рассмотрим два случая.

Случай 1. $v(Z) < k$.

Тогда $V(Z) = \{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ и по Следствию 2 существуют непересекающиеся пути от v_k до всех вершин цикла Z. В этом случае легко вставить v_k в цикл Z между его соседними вершинами и получить искомый цикл.

Случай 2. $v(Z) \geq k$.

• По Следствию 2 существует k непересекающихся путей от v_k до цикла Z.

• Пусть $x_1, \dots, x_k \in V(Z)$ — концы этих путей в порядке их следования по циклу (нумерация — циклическая). Они делят цикл на k дуг и внутренность одной из этих дуг.

• Одна их этих дуг (скажем, дуга L с концами x_i и x_{i+1}) не содержит ни одной из вершин $v_1, \dots, v_{k-1}$. Тогда заменим дугу L на путь от x_i до v_k и путь от v_k до x_{i+1}, в результате получится искомый цикл. $\square$

Лемма 5

Пусть G — k-связный граф, $S \subset V(G)$ — разделяющее множество, $|S| = k$, а U — компонента связности графа $G - S$. Тогда для любой вершины $a \in S$ существует вершина $x \in U$, смежная с a.

Доказательство. • Предположим противное, пусть такой вершины в U нет.

• Пусть W — отличная от U компонента связности графа $G - S$

• Тогда никакой путь в графе G из U в W не проходит через a.

• Пусть $S' = S \setminus \{a\}$. Тогда в графе $G - S'$ нет пути из U в W, то есть, этот граф несвязен.

• Так как $|S'| = k - 1$, получаем противоречие с k-связностью G. □

Теорема 8

Пусть G — двусвязный граф, $v(G) \geq 4$, $a \in V(G)$. Тогда существует такое ребро $ab \in E(G)$, что граф $G \cdot ab$ двусвязен.

Доказательство. • Предположим, что это неверно.

Утверждение

Для любого ребра $ax \in E(G)$ множество $\{a, x\}$ — разделяющее в графе G.

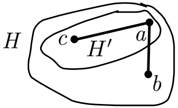
Доказательство. • Тогда граф $G \cdot ax$ имеет точку сочленения — скажем, w.

• Если $w = a \cdot x$, то граф $G - \{a, x\} = G \cdot ax - a \cdot x$ несвязен, что нам и нужно.

• Пусть $w \neq a \cdot x$. Тогда пусть A — компонента связности $G - w$, содержащая вершину $a \cdot x$, а B — другая компонента $G - w$.

• Пусть $A' = (A \setminus a \cdot x) \cup \{a, x\})$. Тогда в графе $G - w$ нет пути из A' в B, что противоречит двусвязности G. $\square$

- Рассмотрим все графы вида $G - \{a, x\}$, где $ax \in E(G)$ и все их компоненты связности.
- Выберем из них минимальную компоненту H. Пусть $ab \in E(G)$, а H — компонента графа $G - \{a, b\}$.
- По Лемме 5, существует вершина $c \in H$, смежная с a. Тогда по Утверждению граф $G - \{a, c\}$ несвязен.
- Пусть $W_1, \dots, W_k$ — все отличные от H компоненты $G - \{a, c\}$.
- Так как по Лемме 5 в каждой компоненте W_i есть вершина, смежная с b, множество $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} W_i\right) \cup \{b\}$ связано в графе $G - \{a, c\}$, то есть, лежит в одной компоненте связности W этого графа.
- Следовательно, любая другая компонента H' графа $G - \{a, c\}$ — подмножество $H \setminus \{c\}$, противоречие с минимальностью H. $\square$



Зависимые и независимые разделяющие множества

Определение

Пусть G — k-связный граф. Через $\mathfrak{R}_k(G)$ обозначим множество всех k-вершинных разделяющих множеств G. Назовем различные множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ *независимыми*, если S не разделяет T и T не разделяет S. В противном случае мы будем называть эти множества *зависимыми*.

• К сожалению, разделяющие множества, состоящие из $k \geq 2$ вершин, могут быть зависимыми. Именно с этим связаны основные трудности в изучении k-связных графов при $k \geq 2$.

• Через $\mathrm{Comp}(H)$ обозначим множество всех компонент связности графа H.

Лемма 6

Пусть $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ и компонента $A \in \mathrm{Comp}(G - S)$ таковы, что $T \cap A = \varnothing$. Тогда T не разделяет $A \cup S$.

Доказательство. • Граф $G(A)$ связен.

• По Лемме 5 любая вершина $x \in S \setminus T$ смежна хотя бы с одной из вершин A.

• Следовательно, граф $G(A \cup (S \setminus T))$ связен, откуда следует, что T не разделяет $A \cup S$.

Лемма 7

Пусть $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ таковы, что множество S не разделяет множество T. Тогда множество T не разделяет множество S (то есть, эти множества независимы).

Доказательство. • Так как S не разделяет T, множество T может пересекать внутренность не более, чем одной из компонент $\mathrm{Comp}(G - S)$.

• Тогда существует такая компонента $A \in \mathrm{Comp}(G - S)$, что $A \cap T = \varnothing$.

• По Лемме 6 T не разделяет S. □

• Мы установили, что возможен один из двух случаев: либо множества S и T разделяют друг друга (тогда они зависимы), либо множества S и T не разделяют друг друга (тогда они независимы).

Лемма 8

Пусть множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ *независимы, а компонента* $A \in \mathrm{Comp}(G - S)$ *такова, что* $T \subset A \cup S$ *(такая, очевидно, есть).*

1) *Тогда существует такая компонента* $B \in \mathrm{Comp}(G - T)$, *что* B *содержит* $S \setminus T$ *и все отличные от* A *компоненты из* $\mathrm{Comp}(G - S)$.

• 2) *Все отличные от* B *компоненты из* $\mathrm{Comp}(G - T)$ *— подмножества* A.

Доказательство. • 1) Множество T не пересекает отличных от A компонент из $\mathrm{Comp}(G - S)$.

• По Лемме 7 тогда множество T не разделяет никакой отличной от A компоненты из $\mathrm{Comp}(G - S)$.

• Поскольку $S \setminus T \neq \varnothing$, существует такая компонента $B \in \mathrm{Comp}(G - T)$, что B содержит $S \setminus T$ и все отличные от A компоненты из $\mathrm{Comp}(G - S)$.

2) Прямое следствие пункта 1. □

Теорема 9

(W. T. Tutte.) *Пусть G — трёхсвязный граф, отличный от K_4. Тогда существует такое ребро $e \in E(G)$, что граф $G \cdot e$ трёхсвязен.*

Доказательство. • Предположим, что это неверно.

Утверждение

Для любого ребра $ab \in E(G)$ существует такое множество $T_{ab} \in \mathfrak{R}_3(G)$, что $T_{ab} \ni a, b$.

Доказательство. • Пусть $ab \in E(G)$. Тогда граф $G \cdot ab$ нетрёхсвязен, а значит, имеет двухвершинное разделяющее множество S.

• Пусть $w = a \cdot b$. Предположим, что $w \notin S$.

• Так как $ab \in E(G)$, вершины a, b лежат в одной компоненте $\mathrm{Comp}(G - S)$.

• Пусть $U \in \mathrm{Comp}(G \cdot ab - S)$ — другая компонента. Тогда в $G \cdot ab$ нет пути из U в w.

• Значит, в $G - S$ нет пути из U в $\{a, b\}$ — противоречие с трёхсвязностью G.

• Остается случай, когда $w \in S$. Пусть $S = \{w, x\}$.

• Тогда $T_{a,b} = \{a, b, x\}$ нам подходит: граф $G - \{a, b, x\} = G \cdot ab - w$ несвязен.

- Рассмотрим минимальную компоненту связности H, отделяемую в графе G множеством, содержащим две вершины одного ребра.
- Пусть $ab \in E(G)$, $T_{ab} = \{a, b, c\}$, $H \in \mathrm{Comp}(G - T_{ab})$.
- Существует вершина $d \in H$, смежная с c. Рассмотрим множество $T_{cd} \in \mathfrak{R}_3(G)$.
- Так как $T_{ab} \setminus T_{cd} \subset \{a, b\}$, а эти две вершины смежны, T_{cd} не разделяет T_{ab}.
- Тогда T_{ab} и T_{cd} независимы по Лемме 7.
- По Лемме 8 существует такая компонента $H' \in \mathrm{Comp}(G - T_{cd})$, что $H' \subsetneq H$.
- Противоречие с минимальностью H. $\square$