Теория графов. Глава 5. Раскраски.

Д. В. Карпов

2023

Хроматическое число

Определение

1) Раскраской вершин графа G в k цветов называется функция $\rho : V(G) \to M$, где $|M| = k$. Раскраска ρ называется правильной, если $\rho(v) \neq \rho(u)$ для любой пары смежных вершин u и v.

2) Через $\chi(G)$ обозначим *хроматическое число* графа G — наименьшее натуральное число, для которого существует правильная раскраска вершин графа G в такое количество цветов.

• Как правило, при разговоре о раскрасках в k цветов мы будем использовать для обозначения цветов числа от 1 до k. В случаях, когда мы используем другие обозначения для цветов, об этом будет сказано.

Лемма 1

Для любого графа G выполняется $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq v(G)$.

Доказательство.

Все вершины одного цвета в правильной раскраске попарно несмежны, то есть образуют независимое множество. □

Лемма 2

Пусть G — связный граф, $\Delta(G) \le d$, причем хотя бы одна из вершин графа G имеет степень менее d. Тогда $\chi(G) \le d$.

Доказательство.

• Индукция по количеству вершин. База для графа, у которого не более d вершин, очевидна.

• Будем считать, что утверждение верно для любого меньшего связного графа с меньшим чем $v(G)$ количеством вершин.

• Пусть $u \in V(G)$ — вершина степени менее d. Рассмотрим граф $G - u$. Пусть $G_1, \dots, G_k$ — компоненты графа $G - u$.

• В каждом из графов $G_1, \dots, G_k$ ввиду связности графа G обязательно есть вершина u_i, смежная в графе G с u.

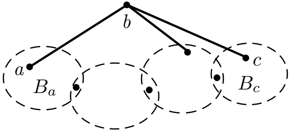
• Тогда $d_{G_i}(u_i) < d$ и $\Delta(G_i) \le d$. По индукционному предположению существует правильная раскраска вершин графа G_i в d цветов.

• Таким образом, существует правильная раскраска вершин в d цветов и у графа $G - u$. Так как $d_G(u) < d$, мы можем докрасить в один из цветов вершину u, не нарушая правильности раскраски графа. □

Лемма 3

Если G — двусвязный неполный граф с $\delta(G) \ge 3$. Тогда существуют такие вершины $a, b, c \in V(G)$, что $ab, bc \in E(G)$, $ac \notin E(G)$ и граф $G - a - c$ связен.

Доказательство. • Пусть G трёхсвязен. Так как G неполный, существуют такие вершины $a, b, c \in V(G)$, что $ab, bc \in E(G)$ и $ac \notin E(G)$. Граф $G - a - c$, очевидно, связен.



• Пусть G не трёхсвязен. Тогда существует такая вершина $b \in V(G)$, что граф $G' = G - b$ не двусвязен.

• Граф G' имеет хотя бы два крайних блока. Так как граф G двусвязен, вершина b должна быть смежна хотя бы с одной внутренней вершиной каждого крайнего блока графа G'. Пусть a и c — смежные с b внутренние вершины двух разных крайних блоков B_a и B_c графа G' соответственно.

• Тогда графы $B_a - a$ и $B_c - c$ связны, откуда легко следует связность графа $G' - a - c$. Так как $d_G(b) \ge 3$, вершина b смежна с $G' - a - c$, а значит, и граф $G - a - c$ связен.

Теорема Брукса

Теорема 1

(R. L. Brooks, 1941.) *Пусть $d \geq 3$, а G — связный граф, отличный от K_{d+1}, $\Delta(G) \leq d$. Тогда $\chi(G) \leq d$.*

• При $\Delta(G) = 2$ вопрос о существовании правильной раскраски вершин связного графа G в два цвета очевиден. Такой граф G — либо P_n (путь из n вершин), либо C_n (цикл из n вершин). В первом случае легко видеть, что $\chi(P_n) = 2$, а во втором случае $\chi(C_{2k}) = 2$ и $\chi(C_{2k+1}) = 3$.

Доказательство теоремы 1. • Достаточно рассмотреть случай регулярного графа степени d (иначе воспользуемся леммой 2). Рассмотрим два случая.

Случай 1: в графе G есть точка сочленения a.

• Тогда $G = G_1 \cup G_2$, где $V(G_1) \cap V(G_2) = \{a\}$, а графы G_1 и G_2 связные.

• Так как a смежна хотя бы с одной вершиной и в G_1, и в G_2, то $d_{G_1}(a) < d$ и $d_{G_2}(a) < d$. Следовательно, по Лемме 2 для каждого $i \in \{1, 2\}$ граф G_i имеет правильную раскраску вершин ρ_i в d цветов.

• Так как цвета в этих раскрасках нумеруются независимо, можно считать, что $\rho_1(a) = \rho_2(a) = 1$.

• Теперь мы можем склеить раскраски ρ_1 и ρ_2 по точке сочленения a и получить правильную раскраску графа G.

Случай 2: G двусвязен.

• По лемме 3 существуют такие $a, b, c \in V(G)$, что $ab, bc \in E(G)$, $ac \notin E(G)$ и граф $G - a - c$ связен.

• Рассмотрим связный граф $G' = G - \{a, c\}$ и остовное дерево T этого графа.

- Сделаем вершину b корнем T и распределим вершины T по уровням (номером уровня будет расстояние до корня b).
- Положим $\rho(a) = \rho(c) = 1$ и будем красить остальные вершины графа G (они же вершины дерева T) в порядке убывания номеров их уровней, начиная с листьев T.
- Пусть $x \neq b$ — очередная вершина, причем на момент ее рассмотрения мы покрасили все вершины больших уровней и не красили вершин меньших уровней.
- Тогда предок вершины x в дереве T еще не покрашен, а значит, покрашено не более, чем $d-1$ соседей вершины x. Мы можем выбрать цвет $\rho(x)$ отличным от всех уже покрашенных соседей вершины x.
- В итоге все отличные от корня b вершины мы покрасим. Рассмотрим b — все ее соседи уже покрашены, причём $\rho(a) = \rho(c)$. Следовательно, существует цвет, в который не покрашен ни один из соседей вершины b. Именно в этот цвет мы покрасим вершину b и получим правильную раскраску вершин графа G в d цветов.

Графы с большим хроматическим числом без треугольников.

Определение

Кликовое число графа G (обозначение: $\omega(G)$) — это количество вершин в наибольшей *клике* (то есть полном подграфе) этого графа.

• Очевидно, $\chi(G) \geq \omega(G)$. Самый простой способ построить граф с большим хроматическим числом — поместить в граф клику большого размера. Однако, граф с большим хроматическим числом может не иметь большой клики.

Теорема 2

(J. Mycielski, 1955.) *Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такой граф G без треугольников, что $\chi(G) = k$.*

Доказательство. • Для $k = 1$ и $k = 2$ подойдут полные графы K_1 и K_2. Стартуя от графа $G_2 = K_2$, мы построим серию примеров графов $G_3, G_4, \dots$ без треугольников с $\chi(G_k) = k$.

• Переход: пусть построен граф G_k, причём $V(G_k) = \{u_1, \dots, u_n\}$.

• Этот граф будет частью графа G_{k+1}, в котором будут добавлены множество новых вершин $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ и новая вершина w.

• Рёбра между новыми вершинами проведёми так: v_i будет смежна со всеми вершинами из $\mathrm{N}_{G_k}(u_i)$ и только с ними, а w — со всеми вершинами $v_1, \dots, v_n$ и только с ними (см. рис.).

Утверждение 1

В графе G_{k+1} нет треугольников.

Доказательство. • Предположим противное.

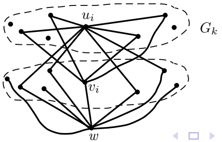
• Так как V — независимое множество в G_{k+1}, треугольник содержит не более одной вершины из V.

• Так как $\mathrm{N}_{G_{k+1}}(w) = V$, треугольник не содержит w.

• Так как в G_k по индукционному предположению нет треугольников, наш треугольник имеет вид $v_i u_s u_t$.

• Тогда $i \notin \{s, t\}$ и по построению $\mathrm{N}_{G_{k+1}}(v_i) = \mathrm{N}_{G_{k+1}}(u_i)$.

• Следовательно, в графе G_k есть треугольник $u_i u_s u_t$, противоречие. $\square$



Утверждение 2

$\chi(G_{k+1}) = k + 1.$

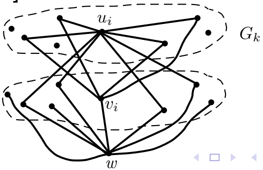
Доказательство. • Очевидно, $\chi(G_{k+1}) \le k+1$: если ρ — правильная раскраска вершин G_k в k цветов, то можно продолжить её на G_{k+1}, использовав только один дополнительный цвет: положим $\rho(v_i) = \rho(u_i)$, $\rho(w) = k+1$.

• Предположим, что $\chi(G_{k+1}) \le k$, и рассмотрим правильную раскраску ρ вершин графа G_{k+1} в k цветов. НУО $\rho(w) = k$.

• Построим правильную раскраску ρ' вершин графа G_k в $k-1$ цвет и, тем самым, придём к противоречию.

• Для каждой вершины u_i положим $\rho'(u_i) = \rho(u_i)$, если $\rho(u_i) \ne k$, и $\rho'(u_i) = \rho(v_i)$, если $\rho(u_i) = k$.

• Так как вершины $v_1, \dots, v_n$ смежны с вершиной w цвета k, то их цвета отличны от k, следовательно, $\rho' : V(G_k) \to [1..k-1]$.



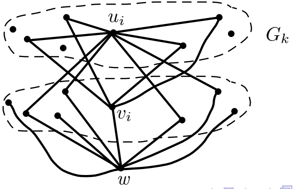
• Докажем правильность раскраски ρ'. Предположим противное, пусть $\rho'(u_i) = \rho'(u_j)$, вершины u_i и u_j смежны. Очевидно, хотя бы одна из них перекрашена, пусть это u_i, тогда $\rho'(u_i) = \rho(v_i)$.

• Мы перекрашивали только вершины, имеющие цвет k в раскраске ρ, среди них не было смежных, следовательно, $\rho'(u_j) = \rho(u_j)$.

• По построению, из $u_j \in \mathrm{N}_{G_k}(u_i)$ следует $u_j \in \mathrm{N}_{G_k}(v_i)$ и мы можем сделать вывод $\rho'(u_i) = \rho(v_i) \neq \rho(u_j) = \rho'(u_j)$, противоречие с предположением.

• Таким образом, ρ' — правильная раскраска вершин графа G_k, противоречие. Следовательно, $\chi(G_{k+1}) = k + 1$. $\square$

• Утверждения 1 и 2 полностью одказывают индукционный переход в Теореме 2. $\square$



Хроматический многочлен

Определение

Для любого натурального числа k обозначим через $\chi_G(k)$ количество правильных раскрасок вершин графа G в k цветов. Функция $\chi_G(k)$ называется *хроматическим многочленом* графа G.

• Таким образом, $\chi_G(\chi(G)) \neq 0$, и $\chi_G(k) = 0$ для любого натурального числа $k < \chi(G)$.

Лемма 4

Пусть G — непустой граф, а $e = uv$ — его ребро. Тогда $\chi_{G-uv}(k) = \chi_G(k) + \chi_{G\cdot uv}(k)$.

Доказательство. • Разобьем правильные раскраски графа $G - e$ в k цветов на два типа: те, в которых вершины u и v одного цвета (тип 1) и те, в которых вершины u и v разных цветов (тип 2).

• Количество раскрасок первого типа равно $\chi_{G\cdot e}(k)$, а количество раскрасок второго типа равно $\chi_G(k)$. $\square$

Теорема 4

Для графа G с $v(G) = n$ $\chi_G(k)$ — многочлен с целыми коэффициентами степени n, старший коэффициент равен 1.

Доказательство. • Мы будем доказывать оба утверждения индукцией по количеству вершин и ребер графа G. А именно, доказывая утверждение для графа G, мы будем считать его справедливым для всех меньших графов.

База для пустого графа $\overline{K}_n$: понятно, что $\chi_{\overline{K}_n}(k) = k^n$, а значит, все утверждения теоремы выполнены.

Переход. Пусть G — непустой граф, а e — его ребро. По лемме 4 $\chi_G(k) = \chi_{G-e}(k) - \chi_{G\cdot e}(k)$.

• Для меньших графов $G \cdot e$ и $G - e$ уже доказаны все утверждения теоремы: $\chi_{G-e}(k)$ — многочлен степени $v(G)$, а $\chi_{G\cdot e}(k)$ — многочлен степени $v(G \cdot e) = v(G) - 1$.

• Старший коэффициент $\chi_G(k)$ равен старшему коэффициенту $\chi_{G-e}(k)$, то есть, 1. $\square$

Хроматический многочлен и компоненты

Теорема 5

Пусть $G_1, \dots, G_n$ *— все компоненты графа* G*. Тогда*

$$\chi_G(k) = \prod_{i=1}^{n} \chi_{G_i}(k).$$

Доказательство.

• При правильной раскраске вершин графа вершины разных компонент можно красить независимо друг от друга.

• Следовательно, произведение количеств правильных раскраскок графов $G_1, \dots, G_n$ в k цветов есть количество правильных раскрасок вершин графа G в k цветов. $\square$

Хроматический многочлен и блоки

Теорема 6

Пусть G — связный граф с n блоками $B_1, \dots, B_n$. Тогда

$$\chi_G(k) = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} \cdot \prod_{i=1}^{n} \chi_{B_i}(k).$$

Доказательство. • Докажем утверждение индукцией по количеству блоков в графе G. База для двусвязного графа, который является своим единственным блоком, очевидна.

Переход. Пусть $n \geq 2$. НУО, B_n — крайний блок, содержащий ровно одну точку сочленения (скажем, a).

• В графе $G' = G - \mathrm{Int}(B_n)$ ровно на один блок меньше: исчез блок B_n, остальные блоки не изменились.

- По индукционному предположению для графа G':

$$\chi_{G'}(k) = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-2} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \chi_{B_i}(k).$$

- Остается доказать, что $\chi_G(k) = \frac{1}{k} \cdot \chi_{G'}(k) \cdot \chi_{B_n}(k)$.
- Рассмотрим любую правильную раскраску ρ графа G' в k цветов и попробуем докрасить вершины блока B_n с соблюдением правильности.
- Единственное ограничение, которое накладывается на раскраску блока B_n — зафиксирован цвет вершины a, что уменьшает количество раскрасок блока B_n ровно в k раз.

$\square$

Теорема 7

Для любого графа G число 0 является корнем $\chi_G(k)$ кратности, равной количеству компонент связности графа G.

Доказательство. • 0 является корнем хроматического многочлена любого графа. Это очевидно из определения: правильных раскрасок в 0 цветов не бывает.

• Ввиду Теоремы 5 достаточно доказать, что для связного графа G кратность корня 0 у $\chi_G(k)$ равна 1.

• Пусть $v(G) = n$. Индукцией по количеству вершин докажем для связного графа G, что коэффициент при k многочлена $\chi_G(k)$ не равен 0 и имеет такой же знак как $(-1)^{n-1}$. База для $n = 1$ очевидна.

Переход. • Пусть G — связный граф с $v(G) = n \geq 2$, для меньшего количества вершин утверждение доказано, а T — остовное дерево графа G. Нетрудно понять, что $\chi_T(k) = k(k-1)^{n-1}$.

• Существует последовательность графов $G_0 = T, \dots, G_n = G$, в которой $G_{i+1} = G_i + e_i$, где $e_i \notin E(G_i)$.

• Пусть a_i — коэффициент при k многочлена $\chi_{G_i}(k)$. Докажем по индукции, что $a_i \neq 0$ и имеет такой же знак, как $(-1)^{n-1}$. База для $i = 0$ очевидна из приведенной выше формулы.

• Докажем переход. Пусть коэффициент $a_i \neq 0$ и имеет знак $(-1)^{n-1}$.

• По Лемме 4 $\chi_{G_{i+1}}(k) = \chi_{G_i}(k) - \chi_{G_{i+1}\cdot e_i}(k)$.

• Граф $G_{i+1} \cdot e_i$ связен.

• По индукционному предположению у многочлена $\chi_{G_{i+1}\cdot e_i}(k)$ знак коэффициента b при k такой же, как $(-1)^{n-2}$, то есть, *отличается от знака* a_i.

• Поэтому $a_{i+1} = a_i - b$ имеет такой же знак, как a_i, и отличен от 0. $\square$

Теорема 8

(E. G. Whitehead, L.-C. Zhao, 1984.) *Пусть G — связный граф с более чем одной вершиной. Тогда число 1 является корнем многочлена $\chi_G(k)$ кратности, равной количеству блоков графа G.*

Доказательство. • В каждом блоке графа G хотя бы две вершины.

• Ввиду Теоремы 6 достаточно доказать, что у хроматического многочлена графа H, не имеющего точек сочленения, число 1 является корнем кратности ровно 1. Тогда из доказанной в Лемме 4 формулы будет следовать утверждение теоремы.

• Для $H \simeq K_2$, утверждение очевидно. Далее рассмотрим случай, когда H двусвязен.

• Двусвязный граф H невозможно правильно покрасить в 1 цвет, следовательно, 1 является корнем хроматического многочлена такого графа.

• Остается показать, что кратность этого корня равна 1. Для этого достаточно доказать, что $\chi'_H(1) \neq 0$.

• Мы покажем, что для двусвязного графа H на m вершинах $\chi'_H(1) \neq 0$ и имеет такой же знак, как $(-1)^m$. Доказательство будет индукцией по размеру графа.

• База: $v(H) = 3$. Тогда H — это полный граф на трёх вершинах и утверждение несложно проверить: $\chi_{K_3}(k) = k(k-1)(k-2)$ и $\chi'_{K_3}(1) = 1(1-2) = -1$.

• Переход: пусть $v(H) \geq 4$ и утверждение доказано для всех меньши графов.

• Тогда по Теореме 4.7 существует такое ребро $e \in E(H)$, что граф $H \cdot e$ двусвязен.

• По Лемме 4 $\chi'_H(1) = \chi'_{H-e}(1) - \chi'_{H \cdot e}(1)$.

• Так как $v(H \cdot e) = m - 1$ и граф $H \cdot e$ двусвязен, $\chi'_{H \cdot e}(1) \neq 0$ и имеет тот же знак, что и $(-1)^{m-1}$.

• Так как $e(H - e) < e(H)$, если граф $H - e$ двусвязен, то уже доказано, что $\chi'_{H-e}(1)$ имеет тот же знак, что и $(-1)^m$.

• Если же граф $H - e$ недвусвязен, то он связен и имеет хотя бы два блока. Тогда для него верна формула из Теоремы 6.

• Так как хроматический многочлен каждого блока имеет своим корнем 1, для недвусвязного графа $H - e$ его хроматический многочлен имеет 1 корнем кратности хотя бы 2, то есть, в этом случае $\chi'_{H-e}(1) = 0$.

• В любом из случаев получается, что $\chi'_H(1) \neq 0$ и имеет тот знак, что нам нужен. $\square$

Раскраски рёбер

Определение

1) Раскраской рёбер графа G в k цветов называется функция $\rho : E(G) \to M$, где $|M| = k$. Обычно мы будем использовать для обозначения k цветов в раскраске числа от 1 до k: в случаях, когда $M \neq [1..k]$, об этом будет сказано.

2) Любая раскраска ρ ребер графа G в цвета $[1..k]$ — это разбиение множества $E(G)$ в объединение непересекающихся множеств $E_1, \dots, E_k$, где ρ принимает значение i на рёбрах множества E_i.

• Графы, рассматриваемые в этом разделе могут иметь кратные рёбра, но не имеют петель.

• В отличие от раскрасок вершин, при рассмотрении раскрасок рёбер кратные рёбра играют существенную роль.

Определение

1) Раскраска рёбер ρ называется *правильной*, если $\rho(e) \neq \rho(e')$ для любой пары смежных рёбер e и e'.

2) Через $\chi'(G)$ обозначим *хроматический индекс* графа G — наименьшее натуральное число, для которого существует правильная раскраска рёбер графа G в такое количество цветов.

Определение

Пусть ρ — раскраска рёбер графа G в k цветов.
1) Пусть $v \in V(G)$. Будем говорить, что в раскраске ρ цвет i *представлен* в вершине v, если существует инцидентное v ребро e такое, что $\rho(e) = i$. Обозначим через $\rho(v)$ количество цветов, представленных в вершине v.
2) Введем обозначение $\rho(G) = \sum_{v \in V(G)} \rho(v)$. Назовем раскраску ρ *k-оптимальной*, если для любой другой раскраски ρ' рёбер графа G в k цветов $\rho(G) \geq \rho'(G)$.

• Пусть ρ — правильная раскраска рёбер графа G в не более чем k цветов. Тогда для каждой вершины $v \in V(G)$ мы имеем $\rho(v) = d_G(v) \geq \rho'(v)$ для любой другой раскраски ρ'. Таким образом, правильная раскраска рёбер всегда является k-оптимальной.

Лемма 5

Пусть G — связный граф, отличный от простого цикла нечетной длины. Тогда существует такая раскраска рёбер G в два цвета, что в каждой вершине степени не менее двух представлены оба цвета.

Доказательство. • Если все вершины G имеют степень 2, то G — четный цикл, для которого утверждение очевидно. Далее рассмотрим другие случаи.

• Если в графе есть вершины нечетной степени, то добавим новую вершину w и соединим её со всеми вершинами нечетной степени графа G. Получится граф $\tilde{G}$, степени всех вершин которого четны. Если все степени вершин графа G четны, положим $\tilde{G} = G$.

• Если в графе G есть вершины нечетной степени, то положим $a = w$. Если в графе G все вершины имеют четную степень, то есть вершина степени хотя бы 4, то мы выберем в качестве a именно такую вершину.

• В графе $\tilde{G}$ есть эйлеров цикл. Начиная с вершины a, будем красить ребра графа, чередуясь, в цвета 1 и 2 по ходу ЭЦ.

• Пусть $x \neq a$. При $d_G(x) \geq 2$ мы как минимум один раз прошли по ЭЦ через x. Следовательно, существуют два разноцветных ребра графа G, инцидентных x.

• Остается проверить условие для вершины a, что нужно делать только в случае, когда $a \neq w$. Тогда $d_G(a) \geq 4$ и ЭЦ хотя бы один раз прошел через a, а значит, есть два инцидентных a ребра разного цвета. $\square$

• Отметим, что в Лемме 5 допускается наличие в графе кратных рёбер. Также оно ничем не мешает в следующей лемме.

Лемма 6

Пусть ρ — k-оптимальная раскраска ребер графа G. Предположим, что вершина w и цвета i и j таковы, что в вершине w хотя бы два раза представлен цвет i и не представлен цвет j. Пусть $H = G(E_i \cup E_j)$, а H_w — компонента графа H, содержащая вершину w. Тогда H_w — простой цикл нечетной длины.

Доказательство.

• Предположим, что H_w не является простым циклом нечетной длины.

• Построим новую раскраску ρ', отличающуюся от ρ лишь раскраской рёбер из H_w: мы раскрасим их в цвета i и j так, чтобы в каждой вершине x степени $d_{H_w}(x) \geq 2$ были представлены оба цвета i и j (это возможно по Лемме 5).

• Тогда $\rho'(w) = \rho(w) + 1$, а для любой другой вершины x, очевидно, $\rho'(x) \geq \rho(x)$. Таким образом, $\rho'(G) > \rho(G)$, противоречие с k-оптимальностью ρ. $\square$

• Несложно понять, что $\chi'(G) \geq \Delta(G)$: все рёбра, инцидентные вершине наибольшей степени, должны быть разноцветными.

Теорема 9

(D. König, 1916.) *Пусть G — двудольный граф (возможно, с кратными рёбрами). Тогда $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Доказательство.

• Пусть $\Delta = \Delta(G)$. Рассмотрим Δ-оптимальную раскраску ρ рёбер графа G.

• Предположим, что раскраска ρ — неправильная. Тогда существует вершина v и цвет i такие, что i дважды представлен в вершине v.

• Так как $d_G(v) \leq \Delta$, существует цвет j, не представленный в вершине v. Тогда по Лемме 6 в графе G есть нечетный цикл, противоречие. Следовательно, раскраска ρ — правильная. $\square$

Определение

• Назовем раскраску ρ рёбер графа G *покрывающей*, если ребра каждого цвета образуют покрытие (то есть покрывают все вершины).

• Через $\kappa'(G)$ обозначим *покрывающий индекс* графа G — наибольшее натуральное число, для которого существует покрывающая раскраска рёбер графа G в такое количество цветов.

Теорема 10

(R. P. Gupta, 1966.) *Если граф G — двудольный, то $\kappa'(G) = \delta(G)$.*

Доказательство. • Рассмотрим $\delta(G)$-оптимальную раскраску ρ рёбер графа G.

• Предположим, что раскраска ρ не является покрывающей. Тогда существует вершина v и цвет i такие, что i не представлен в вершине v.

• Так как $d_G(v) \geq \delta(G)$, то существует цвет j, представленный в вершине v не менее, чем дважды. Тогда по Лемме 6 в графе G есть нечетный цикл, противоречие. Следовательно, раскраска ρ — покрывающая.

Теорема 11

(В. Г. Визинг, 1964.) *Пусть G — граф без кратных рёбер. Тогда $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G) + 1$.*

Доказательство. **(J.-C. Fournier, 1973.)**

• Пусть $k = \Delta(G) + 1$. Достаточно доказать существование правильной раскраски рёбер G в k цветов. Рассмотрим k-оптимальную раскраску ρ рёбер G.

• Предположим, что раскраска ρ — неправильная. Тогда существует вершина u и цвет i_1, который дважды представлен в вершине u. Так как $d_G(u) < k$, то существует цвет j, не представленный в вершине u.

• Пусть $uv_1 \in E(G)$, $\rho(uv_1) = i_1$. Так как $d_G(v_1) < k$, существует цвет i_2, не представленный в v_1.

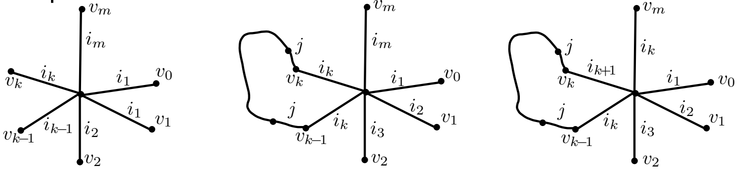
Шаг процесса построения

- Пусть $\ell \geq 1$, а цвета $i_1, \dots, i_\ell$ различны.
- Пусть рёбра $uv_1, \dots, uv_\ell \in E(G)$ таковы, что $\rho(uv_t) = i_t$ при $t \in [1..\ell]$, причем при $t < \ell$ цвет i_{t+1} не представлен в вершине v_t.
- Так как $d_G(v_\ell) < k$, существует цвет $i_{\ell+1}$, не представленный в вершине v_ℓ.
- Определим раскраску ρ_ℓ: $\rho_\ell(uv_s) = i_{s+1}$ при $s \in [1..\ell]$, $\rho_\ell(e) = \rho(e)$ на остальных рёбрах e.

Докажем, что $\rho_\ell(G) \geq \rho(G)$.

- Для вершины $x \notin \{u, v_1, \dots, v_\ell\}$ цвета инцидентных x рёбер не менялись, поэтому $\rho_\ell(x) = \rho(x)$.
- Рассмотрим вершину v_t, $t \in [1..\ell]$. Цвет i_{t+1} не представлен в вершине v_t в раскраске ρ, но представлен в раскраске ρ_ℓ. Цвет i_t представлен в раскраске ρ и, возможно, не представлен в раскраске ρ_ℓ. Все ребра, кроме uv_t не изменили цвета, поэтому $\rho_\ell(v_t) \geq \rho(v_t)$.
- Рассмотрим вершину u. В результате перекрашивания рёбер $uv_1, \dots, uv_\ell$ из их цветов исчез i_1 и появился $i_{\ell+1}$. Однако, цвет i_1 представлен в вершине u в раскраске ρ_ℓ: $\rho_\ell(uv_0) = i_1$.
- Поэтому $\rho_\ell(u) \geq \rho(u)$ и $\rho_\ell(G) \geq \rho(G)$.

• Из k-оптимальности ρ следует, что ρ_ℓ также k-оптимальна. Более того, $\rho_\ell(G) = \rho(G)$, следовательно, $\rho_\ell(u) = \rho(u)$. Это означает, что цвет $i_{\ell+1}$ представлен в вершине u в раскраске ρ, пусть $\rho(uv_{\ell+1}) = i_{\ell+1}$. Шаг завершен!

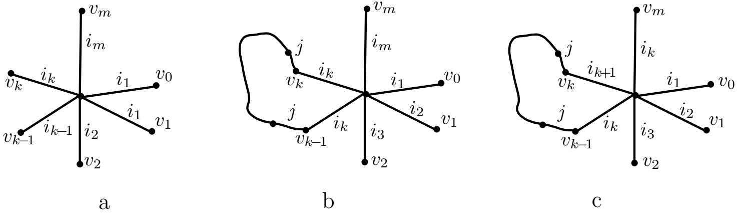


a b c

• Поскольку у вершины u конечное число соседей, на некотором шаге построения мы впервые получим $i_{m+1} = i_k$. Рассмотрим k-оптимальные раскраски ρ_{k-1} и ρ_m (мы положим $\rho_0 = \rho$). На рисунке изображены цвета рёбер, соединяющих u с $v_0, v_1, \dots, v_m$ в раскрасках ρ (рис. a), ρ_{k-1} (рис. b) и ρ_m (рис. c).

• В обеих раскрасках в вершине u дважды представлен цвет i_k: $\rho_{k-1}(uv_{k-1}) = \rho_{k-1}(uv_k) = i_k$, $\rho_m(uv_m) = \rho_m(uv_{k-1}) = i_k$.

• Пусть E_s — множество всех ребер цвета s в раскраске ρ_{k-1}, а E'_s — множество всех ребер цвета s в раскраске ρ_m, $H = G(E_{i_k} \cup E_j)$ и $H' = G(E'_{i_k} \cup E'_j)$.



• По Лемме 6 из оптимальности раскрасок ρ_{k-1} и ρ_m следует, что содержащие вершину u компоненты связности графов H и H' — простые циклы нечетной длины.

• Тогда $d_H(v_k) = 2$: из v_k выходит ребро uv_k цвета $\rho_{k-1}(uv_k) = i_k$ и ребро цвета j. Для всех рёбер e цикла H, кроме uv_k мы имеем $\rho_{k-1}(e) = \rho_m(e)$, поэтому $d_{H'}(v_k) = d_H(v_k) - 1 = 1$.

• Очевидно, v_k и u лежат в одной компоненте связности графа H', которая должна быть НЦ. Противоречие.

• Полученное противоречие показывает, что ρ — искомая правильная раскраска рёбер графа G в $\Delta(G) + 1$ цвет. $\square$

Списочные раскраски

- *Списочные раскраски* (list colorings) впервые были определены Визингом в 1976 году (он их назвал *предписанными раскрасками*).
- Каждой вершине графа $v \in V(G)$ ставится в соответствие *список* $L(v)$, после чего рассматривается правильная раскраска вершин с дополнительным ограничением: каждая вершина v должна быть покрашена в цвет из списка $L(v)$.
- Минимальное такое $k \in \mathbb{N}$, что для любых списков из k цветов существует правильная раскраска вершин графа G, обозначается через $\mathrm{ch}(G)$ (и носит название *списочное хроматическое число*, по-английски — *choice number*).
- Во всех случаях, когда речь идет о списках цветов, мы будем обозначать список большой буквой (как правило, L), а его *размер* — соответствующей строчной: так, $\ell(v) = |L(v)|$.
- Очевидно, $\mathrm{ch}(G) \geq \chi(G)$. Существуют графы, для которых $\mathrm{ch}(G) > \chi(G)$.

Списочные раскраски рёбер

• Аналогично списочным раскраскам вершин можно определить списочные раскраски рёбер и списочный хроматический индекс $\mathrm{ch}'(G)$.

• Очевидно, $\mathrm{ch}'(G) \geq \chi'(G)$. В отличие от ситуации со списочными раскрасками вершин, не известно ни одного графа, для которого $\mathrm{ch}'(G) > \chi'(G)$.

• Более того, выдвинута гипотеза (*List Color Conjecture*) о том, что $\mathrm{ch}'(G) = \chi'(G)$ для любого графа G. В 1995 году Гэльвин доказал эту гипотезу для двудольных графов.

K-редуцируемые графы

Определение

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Граф G называется *k-редуцируемым*, если его вершины можно занумеровать $v_1, \dots, v_n$ так, что каждая вершина смежна менее чем с k вершинами с бОльшим номером.

Лемма 7

Пусть G — k-редуцируемый граф. Тогда $\chi(G) \le \mathrm{ch}(G) \le k$.

Доказательство.

• Пусть $v_1, \dots, v_n$ — нумерация вершин графа из определения, причем каждой вершине v_i соответствует список $L(v_i)$ длины $\ell(v_i) \ge k$.

• Покрасим вершины в порядке, обратном нумерации.

• При покраске вершины v_i количество запретов на цвет не превосходит количество ее соседей среди вершин с бОльшим номером, а таких не более $k-1$.

• Значит, мы можем покрасить вершину v_i в цвет из ее списка.

□

• Докажем критерий k-редуцируемости графа.

Лемма 8

Граф G является k-редуцируемым, если и только если для любого его подграфа H выполняется $\delta(H) \le k-1$.

Доказательство.

$\Rightarrow$. • Пронумеруем вершины графа G как в определении.

• Предположим противное, пусть подграф H таков, что $\delta(H) \ge k$.

• Пусть $v_i \in V(H)$ — вершина с наименьшим номером.

• Тогда v_i смежна не менее чем с $d_H(v_i) \ge \delta(H) \ge k$ вершинами с бОльшим номером, противоречие.

$\Leftarrow$. • Пусть v_1 — вершина графа G наименьшей степени. Тогда она смежна не более чем с $d_G(v_1) = \delta(G) \le k-1$ вершинами.

• Предположим, что вершины $v_1, \dots, v_{i-1}$ уже построены.

• Положим $G_i = G - \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$. Тогда граф G_i имеет вершину степени не более $\delta(G_i) \le k-1$ — именно она и будет вершиной v_i. $\square$

Списочная теорема Брукса и d-раскраски

• В 1976 году Визинг доказал списочную версию теоремы Брукса. Мы приведем более общий результат, доказанный Бородиным в 1977 году.

Определение

• Граф G называется *d-раскрашиваемым* (английский вариант этого термина — *d-choosable*), если для любого набора списков L, удовлетворяющего условию $\ell(v) \geq d_G(v)$ для каждой вершины $v \in V(G)$, существует правильная раскраска вершин графа G в цвета из списков.

• Список цветов, удовлетворяющие указанному условию, будем называть d-списком.

Определение

Назовем вершину $v \in V(G)$ *избыточной*, если $\ell(v) > d_G(v)$.

Лемма 9

Пусть G — связный граф, а L — d-список, в котором вершина $a \in V(G)$ избыточная. Тогда существует правильная раскраска вершин графа G в соответствии со списком L.

Доказательство. • Индукция по количеству вершин. База для графа с одной вершиной (естественно, избыточной) очевидна.

• Будем считать, что утверждение доказано для любого связного графа с меньшим чем $v(G)$ количеством вершин.

• Рассмотрим граф $G - a$. Пусть $G_1, \dots, G_k$ — все компоненты графа $G - a$.

• В каждом графе G_i (где $i \in [1..k]$) ввиду связности графа G обязательно есть вершина a_i, смежная с a.

• Рассмотрим граф G_i, оставив списки вершин неизменными. Тогда a_i станет избыточной вершиной (так как $d_{G_i}(a_i) \le d_G(a_i) - 1 \le \ell(a_i) - 1$).

• По индукционному предположению вершины всех графов $G_1, \dots, G_k$ можно покрасить в соответствии со списками.

• Так как $d_G(a) < \ell(a)$, мы можем докрасить вершину a в один из цветов ее списка $L(a)$, не нарушая правильности раскраски графа.

Лемма 10

Пусть G — связный граф, а L — d-список. Предположим, что существуют две смежные вершины $a, b \in V(G)$ такие, что граф $G - a$ связен и $L(a) \not\subset L(b)$. Тогда существует правильная раскраска вершин графа G в соответствии со списком L.

Доказательство. • Пусть $1 \in L(a) \setminus L(b)$.

• В связном графе $G - a$ из всех списков вершин множества $\mathrm{N}_G(a)$, содержащих цвет 1, удалим этот цвет, остальные списки оставим без изменений.

• Получим новые списки $L'(v)$ графа $G - a$.

• Все вершины графа $G - a$ нормальны: для вершин не из $\mathrm{N}_G(a)$ это очевидно, а для $v \in \mathrm{N}_G(a)$ мы имеем $\ell'(v) \geq \ell(v) - 1 \geq d_G(v) - 1 = d_{G-a}(v)$.

• Из $1 \notin L(b)$ следует, что $\ell'(b) = \ell(b)$.

• Так как $d_{G-a}(b) = d_G(b) - 1$, вершина b является избыточной.

• По Лемме 9 существует правильная раскраска вершин графа $G - a$ в цвета из списка L'.

• Докрасив a в цвет 1, мы получим правильную раскраску вершин графа G в цвета списка L.

Определение

Связный граф, в котором каждый блок — нечетный цикл или полный граф, называется *деревом Галлаи*.

Теорема 12

(О. В. Бородин, 1977.) *Если связный граф G не является деревом Галлаи, то G d-раскрашиваем.*

Доказательство. • Пусть каждой вершине v соответствует список $L(v)$. НУО $\ell(v) = d_G(v)$ для каждой вершины $v \in V(G)$.

• Докажем утверждение индукцией по размеру графа.

База: G двусвязен.

• Если не все списки одинаковы, то существуют две смежные вершины a и b с $L(a) \neq L(b)$ и G раскрашиваем по Лемме 10.

• Значит, все списки одинаковы, пусть в них, скажем, d цветов. Тогда и все степени вершин одинаковы и равны d.

• Таким образом, мы имеем дело с правильной раскраской графа степени d в d цветов.

• По условию граф G отличен от полного графа и нечетного цикла. Значит, по теореме Брукса искомая раскраска существует.

Переход: G недвусвязен.

• Пусть для меньшего чем G графа теорема доказана.

• Рассмотрим крайний блок B графа G, отделяемый от остального графа точкой сочленения a.

• Можно считать, что в графе G есть блок, отличный от B, от нечетного цикла и полного графа (иначе рассмотрим в качестве B другой крайний блок).

• Граф $B - a$, очевидно, связен, все его вершины по условию нормальны, а все смежные с a вершины (такие есть!) — избыточны.

• Поэтому по Лемме 9 его вершины можно покрасить в соответствие со списками.

• Пусть $G' = G - \mathrm{Int}(B)$. Граф G' имеет те же самые блоки, что G, кроме B, а значит, среди них есть блок, отличный от нечетного цикла и полного графа.

• Списки всех отличных от a вершин не изменились, а их степени — такие же, как в графе G.

• Новый список $L'(a)$ будет содержать все цвета списка $L(a)$, кроме тех, что использованы для раскраски вершин из $\mathrm{N}_B(a)$.

• Таких цветов не более чем $d_B(a)$, а $d_G(a) = d_B(a) + d_{G'}(a)$. Поэтому $\ell'(a) \geq d_{G'}(a)$.

• По индукционному предположению существует правильная раскраска вершин G' в цвета из списка.

• Вместе с раскраской графа $B - a$ мы получаем искомую правильную раскраску вершин графа G. $\square$

• Условие d-раскрашиваемости из Теоремы 12 является не только достаточным, но также и необходимым.

• Для любого дерева Галлаи можно придумать d-список, в который его вершины нельзя правильно покрасить.

Теорема 13

(В. Г. Визинг, 1976.) *Пусть* $d \geq 3$, *а* G *— связный граф, отличный от* K_{d+1}, $\Delta(G) \leq d$. *Тогда* $\mathrm{ch}(G) \leq d$.

Доказательство. • Пусть каждой вершине $v \in V(G)$ соответствует список $L(v)$, причём $\ell(v) \geq d$.

• Если G — не дерево Галлаи, он раскрасшиваем по Теореме 12.

• Пусть G — дерево Галлаи, то есть, все блоки графа G — нечетные циклы и полные графы.

• Из условия следует, что G недвусвязен. Тогда его блоки отличны от K_{d+1}.

• Рассмотрим крайний блок B графа G и его вершину b, не являющуюся точкой сочленения.

• Очевидно, $\ell(b) \geq d > d_B(b) = d_G(b)$, а значит, вершина b — избыточна и искомая раскраска существует по Лемме 9. □

Совершенные графы

Определение

Кликовое число графа G (обозначение: $\omega(G)$) — это количество вершин в наибольшей клике (то есть полном подграфе) этого графа.

• Очевидно, $\chi(G) \geq \omega(G)$.

• Как нам известно, большое хроматическое число в графе может быть даже в графе без треугольников, тем более без больших клик.

• Однако важное место в теории графов занимают графы, для которых хроматическое и кликовое число равны.

Определение

Граф G называется *совершенным*, если для любого его индуцированного подграфа H выполняется условие $\chi(H) = \omega(H)$.

• Простейшим примером совершенных графов являются полные графы и двудольные графы.

• Отметим, что любой индуцированный подграф совершенного графа также совершенен.

• В 1963 году Берж высказал две гипотезы о том, как устроены совершенные графы.

Слабая гипотеза Бержа. Граф G совершенен тогда и только тогда, когда граф $\overline{G}$ совершенен.

Сильная гипотеза Бержа. Граф G совершенен тогда и только тогда, когда ни G, ни $\overline{G}$ не содержат нечётного цикла длины более 3 в качестве индуцированного подграфа.

• Первая гипотеза была доказана в 1972 г., это сделал Л. Ловас. Доказательство с использованием линейной алгебры, которое мы приведём ниже, значительно проще первоначального доказательства.

• Вторая гипотеза была доказана только в 2002 году, доказательство весьма сложное и техническое.

Теорема 14

(L. Lovász, 1972.) *Граф G совершенен тогда и только тогда, когда для любого его индуцированного подграфа G' выполняется* $\omega(G')\omega(\overline{G'}) = \alpha(G')\omega(G') \geq v(G')$. $(*)$

Следствие 1

Граф G совершенен тогда и только тогда, когда граф $\overline{G}$ совершенен.

Доказательство. **(G. Gasparian, 1996.)**

Доказательство. • Следствие 1 очевидно, так как Теорема 14 даёт критерий совершенности графа, одинаковый для графа и его дополнения.

• Приступим к доказательству теоремы.

$\Rightarrow$. Если граф совершенен, то для любого его индуцированного подграфа G' в силу его совершенности и Леммы 1 мы имеем

$$\omega(G') = \chi(G') \geq \frac{v(G')}{\alpha(G')},$$

откуда умножением на $\alpha(G')$ получаем то, что нужно.

$\Leftarrow$. • Докажем обратную импликацию индукцией по $v(G)$.

• База $v(G) = 1$ очевидна, сосредоточимся на переходе.

• Рассмотрим граф G, удовлетворяющий условию $(*)$.

• По индукционному предположению любой индуцированный подграф G совершенен.

• В частности, для любой вершины $u \in V(G)$ граф $G - u$ совершенен.

• Пусть $\alpha = \alpha(G)$, $\omega = \omega(G)$.

• Тогда для любой вершины $u \in V(G)$ выполняется условие

$$\chi(G - u) = \omega(G - u) \le \omega. \qquad (1)$$

• Предположим, что граф G не совершенен, то есть $\chi(G) > \omega(G)$.

• Пусть $A_0 = \{u_0, \dots, u_{\alpha-1}\}$ — независимое множество в графе G.

• Ввиду условия (1), существует правильная раскраска вершин $G - u_i$ в ω цветов, тогда $V(G - u_i)$ можно разбить на ω независимых множеств: $A_{i\omega+1}, \dots, A_{(i+1)\omega}$.

• Итого мы имеем $\alpha\omega + 1$ независимых множеств:

$A_0, A_1, \dots, A_{\alpha\omega}$.

• Пусть $i \in [0..\alpha\omega]$. Если $\chi(G - A_i) \le \omega - 1$, то из независимости множества A_i мы получаем $\chi(G) \le \chi(G - A_i) + 1 \le \omega$, что противоречит предположению.

• Тогда $\omega(G - A_i) = \chi(G - A_i) \ge \omega$, следовательно, существует клика размера ω в графе $G - A_i$, обозначим множество ее вершин через C_i.

• Таким образом, у нас есть клики $C_0, \dots, C_{\alpha\omega}$.

Утверждение

Пусть C — множество вершин клики размера ω в графе G. Тогда C пересекает все множества $A_0, \dots, A_{\alpha\omega}$, кроме одного.

Доказательство. • Рассмотрим разбиение вершин графа G на $\omega + 1$ независимых множеств $\{\{u_i\}, A_{i\omega+1}, \dots, A_{(i+1)\omega}\}$.

• Так как C может пересекать независимое множество лишь по одной вершине, C пересекает все эти множества, кроме одного.

• Значит, C либо пересекает все множества $A_{i\omega+1}, \dots, A_{(i+1)\omega}$, либо все эти множества, кроме одного и при этом $C \ni u_i$.

• Поскольку $|C \cap A_0| \le 1$, то C содержит не более, чем одну из вершин $u_0, \dots, u_{\alpha-1}$.

- Тогда либо $|C \cap A_0| = 1$ и C пересекает все множества $A_1, \dots, A_{\alpha\omega}$, кроме одного, либо $C \cap A_0 = \varnothing$ и C пересекает все множества $A_1, \dots, A_{\alpha\omega}$. □

- Пусть $M \in M_{\alpha\omega+1}(\mathbb{R})$ — матрица, заданная равенством $m_{i,j} = |A_i \cap C_j|$ (индексы пробегают значения из $[0..\alpha\omega]$).
- Понятно, что $m_{i,j} \in \{0, 1\}$, причем по построению $m_{i,i} = 0$.
- Тогда по Утверждению $m_{i,j} = 1$ при $i \neq j$.
- Таким образом, матрица M имеет нули на главной диагонали и единицы на всех остальных позициях.

Утверждение

$\mathrm{rk}(M) = \alpha\omega + 1$

Доказательство. • Нужно доказать, что строки M ЛНЗ.

- Пусть $k = \alpha\omega$, а $s_0, \dots s_k \in \mathbb{R}$ таковы, что $w = \sum\limits_{i=0}^{k} s_i M_i = 0$.
- Пусть $s = \sum_{i=0}^{k} s_i$. Тогда $w = (s - s_0, s - s_1, \dots, s - s_k)$.
- Следовательно, $\forall i \in \{0, \dots, k\} \quad s - s_i = 0$, откуда

$ks = \sum\limits_{i=0}^{k}(s - s_i) = 0$, а значит, и все $s_i = 0$.

- Таким образазоам, строки матрицы M — ЛНЗ. □

- Пусть $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Рассмотрим матрицу $A \in M_{\alpha\omega+1,n}(\mathbb{R})$, в которой $a_{i,j} = 1$ при $A_i \ni v_j$ и $a_{i,j} = 0$ при $A_i \not\ni v_j$.
- Рассмотрим матрицу $B \in M_{n,\alpha\omega+1}(\mathbb{R})$, в которой $b_{j,\ell} = 1$ при $v_j \in C_\ell$ и $b_{j,\ell} = 0$ при $v_j \notin C_\ell$.
- Легко видеть, что $a_{s,j} = |A_s \cap \{v_j\}|$ и $b_{j,t} = |\{v_j\} \cap C_t|$.
- Проверим, что $A \cdot B = M$:

$$(ab)_{s,t} = \sum_{j=1}^{n} a_{s,j} b_{j,t} = \sum_{j=1}^{n} |A_s \cap \{v_j\}| \cdot |\{v_j\} \cap C_t| = |A_s \cap C_t| = m_{s,t}.$$

- Так как $\mathrm{rk}(M) \le \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B))$, мы имеем

$$v(G) = n \ge \mathrm{rk}(A) \ge \mathrm{rk}(M) = \alpha\omega + 1,$$

что противоречит неравенству $(*)$, а значит, и условию теоремы. $\square$

Обхват и хроматическое число

Определение

• Обхват графа G — это длина наименьшего цикла. Обозначение: $g(G)$.

• Если G — лес, то $g(G) := \infty$.

• Мы уже знаем, что в графе без треугольников может быть сколь угодно большое хроматическое число.

Теорема 15

(P. Erdös, 1959). *Пусть* $k, g \in \mathbb{N}$, $k, g \geq 3$. *Тогда существует граф* G *с* $g(G) \geq g$ *и* $\chi(G) \geq k$.

Доказательство. • Пусть $n \geq (2\delta)^g$. Мы рассмотрим множество $\mathcal{G}$ всех графов G на множестве вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$ с $e(G) = \delta n$.

• Мы не будем "экономить": параметр δ позже будет выбран настолько большим, чтобы все оценки проходили без лишних трудностей.

• Пусть $m = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$. Тогда $|\mathcal{G}| = \mathrm{C}_m^{\delta n}$.

• Пусть A' — суммарное количество "коротких циклов" (длины не более $g-1$) в графах из $\mathcal{G}$, а $A = A' \cdot (\mathrm{C}_m^{\delta n})^{-1}$ — среднее количество "коротких циклов" в графах из $\mathcal{G}$.

Утверждение 1

$A < \frac{n}{6\delta-3}$.

Доказательство. • На вершинах множества V существует $\mathrm{C}_n^\ell \cdot \frac{(\ell-1)!}{2} < \frac{n^\ell}{2\ell}$ циклов фиксированной длины ℓ.

• Данный цикл длины ℓ есть в $\mathrm{C}_{m-\ell}^{\delta n-\ell}$ графах множества $\mathcal{G}$.

• Оценим сверху суммарное количество циклов длины не более $g-1$ в графах множества $\mathcal{G}$: $A' < \sum\limits_{\ell=3}^{g-1} \frac{n^\ell}{2\ell} \cdot \mathrm{C}_{m-\ell}^{\delta n-\ell}$.

• Оценим отдельно каждое слагаемое, поделенное на $|\mathcal{G}|$:

$$A_\ell := \frac{n^\ell}{2\ell} \cdot \frac{\mathrm{C}_{m-\ell}^{\delta n-\ell}}{\mathrm{C}_m^{\delta n}} = \frac{n^\ell}{2\ell} \cdot \frac{(m-\ell)!(\delta n)!}{(m)!(\delta n-\ell)!} =$$

$$\frac{n^\ell}{2\ell} \cdot \frac{\delta n}{m} \cdot \frac{\delta n-1}{m-1} \cdot \ldots \cdot \frac{\delta n-\ell+1}{m-\ell+1} < \frac{1}{2\ell}\left(\frac{\delta n^2}{m}\right)^\ell,$$

так как при $0 < i < n$ выполняется неравенство $\frac{\delta n}{m} > \frac{\delta n-i}{m-i}$.

- В силу $\ell < g$ мы имеем $n-1 \geq (2\delta)^g - 1 > 2^\ell - 1$.
- Продолжим оценку:

$$A_\ell < \frac{1}{2\ell}\left(\frac{\delta n^2}{m}\right)^\ell = \frac{(2\delta)^\ell}{2\ell}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^\ell < \frac{(2\delta)^\ell}{2\ell}\cdot\left(1+\frac{2^\ell-1}{n-1}\right) < \frac{(2\delta)^\ell}{2\ell}\cdot 2 = \frac{(2\delta)^\ell}{\ell} \leq \frac{(2\delta)^\ell}{3}.$$

- Вернемся к оценке на A:

$$A = \sum_{\ell=3}^{g-1} A_\ell < \frac{1}{3}\sum_{\ell=3}^{g-1}(2\delta)^\ell < \frac{1}{3\cdot(2\delta-1)}(2\delta)^g < \frac{n}{6\delta-3}. \qquad \square$$

- Пусть c — достаточно большое число. Для удобства будем считать, что $\frac{n}{c} = p \in \mathbb{N}$.
- Пусть q — доля графов в $\mathcal{G}$, содержащих "большое" независимое множество (размера хотя бы $p = \frac{n}{c}$).

Утверждение 2

При достаточно больших n и δ выполнено $q < \frac{1}{2}$.

Доказательство. • Количество способов выбрать независимое множество размера p равно $\mathrm{C}_n^p < 2^n$.

• Пусть $t = \mathrm{C}_p^2$, тогда в каждом графе, содержащем большое независимое множество, t пар вершин этого множества не могут быть соединены рёбрами. Следовательно,

$$q \le \mathrm{C}_n^p \cdot \frac{\mathrm{C}_{m-t}^{\delta n}}{\mathrm{C}_m^{\delta n}} < 2^n \cdot \prod_{i=0}^{\delta n-1} \frac{m-t-i}{m-i} < 2^n \cdot \left(\frac{m-t}{m}\right)^{\delta n} = 2^n \cdot \left(1-\frac{t}{m}\right)^{\delta n}. \quad (1)$$

• Отметим, что

$$\frac{t}{m} = \frac{\frac{n^2}{c^2}-\frac{n}{c}}{n^2-n} > \frac{1}{2c^2}.$$

• Подставив это неравенство в (1), мы получим

$$q < \left(2 \cdot \left(1-\frac{1}{2c^2}\right)^{\delta}\right)^n < \frac{1}{2}$$

для любого $c > 0$ при достаточно больших n и δ.

- Вернемся к доказательству теоремы.
- Рассмотрим достаточно большие c, δ и n.
- В силу Утверждения 1, среднее количество коротких циклов в графе из $\mathcal{G}$ удовлетворяет неравенству $A < \frac{n}{6\delta-3} < \frac{n}{6}$.
- Следовательно, менее чем в половине графов из $\mathcal{G}$ количество коротких циклов превосходит $\frac{n}{3}$.
- По Утверждению 2 менее чем в половине графов из $\mathcal{G}$ есть большое (не менее $\frac{n}{c}$) независимое множество.
- Следовательно, существует граф $G \in \mathcal{G}$ с $\alpha(G) < \frac{n}{c}$ и количеством коротких циклов не более $\frac{n}{3}$.
- Удалив из каждого короткого цикла по вершине, мы получим граф G' с $g(G') \geq g$, $v(G') \geq \frac{2n}{3}$ и $\alpha(G') < \frac{n}{c}$.
- По Лемме 1 мы имеем $\chi(G') \geq \frac{v(G')}{\alpha(G')} > \frac{2c}{3} > k$ при достаточно большом c. $\square$