

# Вопросы по курсу теории графов. 2023 г, 1 семестр

## 1. Простейшие понятия

1. Граф, подграф. Вершина, окрестность, степень. Сумма степеней вершин графа.
2. Пути, циклы и маршруты. Лемма о выделении простого пути и цикла.
3. Лемма о длинном пути и цикле.
4. Компоненты связности.
5. Дерево. Количество ребер дерева, выделение остовного дерева.
6. Единственность пути между вершинами дерева.
7. Нормальное остовное дерево.
8. Радиус, диаметр и центр графа. Дерево поиска в ширину.
9. Двудольный граф. Критерий двудольности.

## 2. Пути и циклы

1. Эйлеров путь и цикл в графе.
2. Лемма о преобразовании пути в цикл.
3. Существование Гамильтонова пути и цикла: классические критерии Оре и Дирака.
4. Существование Гамильтонова пути и цикла: замыкание по Хваталу.
5. Существование Гамильтонова цикла: критерий Хватала.
6. Гамильтонов цикл в кубе связного графа.

## 3. Паросочетания, независимые множества и покрытия

1. Независимые множества, паросочетания и покрытия в графе. Теорема Галлаи.
2. Максимальное паросочетание и дополняющие пути: теорема Бержа.
3. Теорема Холла.
4. Следствия из теоремы Холла: паросочетания в двудольном графе, где степени одной доли больше чем другой, а также в регулярном двудольном графе.
5. Теорема о гареме.
6. Теорема Кёнига и ее следствие.
7. Паросочетания с предпочтениями. Теорема Гэйла-Шепли.
8. Теорема Татта о совершенном паросочетании.
9. Теорема Петерсена о совершенном паросочетании в регулярном графе степени 3.
10. Теорема Петерсена о выделении 2-фактора в  $2k$ -регулярном графе и ее следствия о регулярных факторах.
11. Теорема Томассена о почти регулярном факторе почти регулярного графа.
12. Дефицит графа. Формула Бержа.

## 4. Связность

1. Точки сочленения и блоки в связном графе. Лемма о пересечении блоков. Каждое ребро содержится в единственном блоке.
2. Дерево блоков и точек сочленения. Лемма о пути и теорема.
3. Крайние блоки.
4. Алгоритм построения блоков с помощью последовательных разрезов графа по точкам сочленения.
5. Рекурсивный алгоритм построения дерева блоков и точек сочленения.
6. Разбиение двусвязного графа на два связных графа заданных размеров.
7. Теорема Менгера в форме Гёринга (для двух множеств).
8. Следствие — две формы теоремы Менгера (для двух вершин и для вершины и множества).
9. Теорема Уитни.
10. Теорема Дирака о цикле, содержащем заданные  $k$  вершин.
11. Лемма о  $k$ -вершинном разделяющем множестве в  $k$ -связном графе.
12. Стягивание ребра в двусвязном графе без потери двусвязности.
13. Зависимые и независимые разделяющие множества.
14. Разбиение  $k$ -связного графа парой независимых разделяющих множеств: лемма о компонентах.
15. Стягивание ребра в трёхсвязном графе без потери трёхсвязности.

## Раскраски

1. Хроматическое число, связь с числом независимости.
2. Правильная раскраска связного графа с вершиной меньшей степени.
3. Лемма о галочке.
4. Теорема Брукса.
5. Конструкция графа с произвольным хроматическим числом без треугольников.

6. Хроматический многочлен графа.
7. Хроматический многочлен и компоненты связности.
8. Хроматический многочлен и блоки.
9. Кратность корня 0 хроматического многочлена.
10. Кратность корня 1 хроматического многочлена.
11. Оптимальные раскраски ребер и их свойства (две леммы).
12. Теорема Кёнига о хроматическом индексе двудольного графа.
13. Теорема Гупты о покрывающем индексе двудольного графа.
14. Теорема Визинга.
15. Списочные раскраски вершин и  $k$ -редуцируемые графы.
16.  $d$ -раскраски. Лемма о избыточной вершине.
17.  $d$ -раскраски. Лемма об удалении вершины с сохранением связности.
18. Теорема Бородина о  $d$ -раскрасках.
19. Списочная теорема Брукса.
20. Совершенные графы. Элементарные примеры, гипотезы Бержа, теорема Ловаса (формулировка).
21. Теорема Ловаса о совершенных графах.

### Планарные графы

1. Изображение графа на плоскости, грань.
2. Теорема Жордана для замкнутой ломаной.
3. Изображение графа на плоскости и сфере, их соответствие. Внешняя грань.
4. Граница грани. Свойства.
5. Циклический обход границы грани.
6. Несвязная граница грани у несвязного графа.
7. Внутренние рёбра граней — мосты. Границы граней графа без мостов — циклы.
8. Если есть две грани с одинаковой границей, то граф — простой цикл.
9. Границы граней двусвязного графа.
10. Границы граней трёхсвязного графа.
11. Изоморфизм графов и плоских изображений. Единственность изображения трёхсвязного планарного графа на плоскости.
12. Формула Эйлера.
13. Оценки на число ребер плоского графа и существование вершины степени не более 5.
14. Непланарность  $K_5$  и  $K_{3,3}$  и их подразбиений.
15. Подразбиения  $K_5$  и  $K_{3,3}$  и стягивание ребра.
16. Теорема Куратовского: трёхсвязность минимального контрпримера.
17. Теорема Куратовского: доказательство без трёхсвязности минимального контрпримера.
18. Триангуляция графа.
19. Существование в триангуляции ребра, входящего ровно в два треугольника.
20. Теорема Вагнера о выпрямлении изображения планарного графа.
21. Лемма о соединении точки на грани с “серединами” рёбер.
22. Двойственный граф. Соответствие объектов плоского графа и его двойственного (вершины, ребра, грани, петли, мосты итд).
23.  $(G^*)^* \simeq G$ .
24. Раскраска граней плоского графа. Теорема о 5 красках.
25. Тэйтова раскраска триангуляции, связь с реберной раскраской кубического плоского графа без мостов.
26. Эквивалентность Тэйта (без Тэйтовых раскрасок).

### Орграфы

1. Компоненты сильной связности ориентированного графа, граф компонент сильной связности. Их свойства.
2. Критерии сильной связности и ацикличности орграфа.
3. Входящее и исходящее дерево вершины.
4. Минимальные сильно связные графы. Оценки на число стрелок.
5. Критерий существования гамильтонова цикла в орграфе.
6. Существование гамильтонова пути в турнире.
7. Существование гамильтонова цикла в сильно связном турнирном графе.
8. Удаление вершин из сильно связного турнирного графа с сохранением сильной связности.
9. Циклы в сильно связных турнирах. Теорема Муна.
10. Теорема Хватала-Ловаса о независимом множестве в ориентированном графе.
11. Теорема Роя-Галлаи о раскрасках и ориентациях.

12. Ядро орграфа. Критерий раскрашиваемости графа в терминах ядер ориентаций.
13. Теорема Гэльвина о списочных рёберных раскрасках двудольного графа.
14. Теорема Галлаи-Мильграма о покрытии орграфа путями.
15. Теорема Дилворса.

### Сети и потоки

1. Сети и потоки. Разрез сети. Лемма о потоке через разрез.
2. Остаточная сеть и дополняющий путь. Лемма о сумме потоков. Поток вдоль пути.
3. Теорема Форда-Фалкерсона и следствие о минимальном разрезе.
4. Целые сети. Целый максимальный поток в целой сети.
5. Реберная теорема Менгера как следствие теоремы Форда-Фалкерсона.
6. Максимальный поток в произвольной сети. Алгоритм кратчайшего пути.

### Теория Рамсея и экстремальные задачи

1. Двумерные числа Рамсея: оценки сверху для случая двух цветов.
2. Оценка снизу на  $r(k, k)$ .
3. Двумерные числа Рамсея: оценка сверху для случая более чем двух цветов.
4. Многомерные числа Рамсея: доказательство конечности.
5. Применение теории Рамсея: задача о выпуклом  $n$ -угольнике.
6. Применение теории Рамсея: теорема Шура об одноцветном решении уравнения  $x + y = z$ .
7. Оценка количества рёбер в графе, удовлетворяющем наследственному свойству.
8. Графы без  $K_n$ : теорема Турана.

### Остовные деревья

1. Формула Кэли.
2. Остовные деревья полного графа. Код Прюфера.
3. Количество листьев в остовном дереве: теорема о промежуточных значениях.
4. Алгоритм выделения остовного дерева с большим числом листьев в связном графе, степени вершин которого не менее 3.
5. Матричная теорема о деревьях.
6. Количество остовных деревьев равно алгебраическому дополнению любого элемента лапласиана.