Серия 11. Орграфы

1. В компании из 50 человек каждый имеет хотя-бы 25 знакомых. Докажите, что четверых из них можно посадить за круглый стол так, чтобы каждый из них сидел между двумя своими знакомыми.

Определение. *Турнир* — это орграф, в котором любые две вершины соединены ровно одной стрелкой.

2. Докажите, что любой не сильно связный турнир (то есть, орграф, в котором любые две вершины соединены ровно одной стрелкой) не менее чем на 3 вершинах можно сделать сильно связным, изменив направление одной стрелки.

3. Между волейбольными командами двух стран был проведен матч-турнир, в котором каждая команда сыграла ровно по одному разу со всеми командами другой страны. При этом каждая команда выиграла хотя бы одну встречу. Докажите, что найдутся четыре команды A, B, C и D такие, что A выиграла у B, B выиграла у C, C выиграла у D, а D выиграла у A. (Ничьих в волейболе не бывает).

4. a) Докажите, что все рёбра нормального дерева графа G можно ориентировать так, чтобы для любого ребра $xy \in E(G)$ в дереве существовал либо xy-путь, либо yx-путь.

b) Ориентация остовного дерева T графа G такова, что для любого ребра $xy \in E(G)$ в дереве T существует либо xy-путь, либо yx-путь. Докажите, что T — нормальное дерево.

5. Ребра графа G разбили на два множества. Ребра из первого множества можно так ориетировать, что граф останется связным (при этом, ребра второго множества остаются двусторонними). Ребра второго множества также можно ориентировать, не нарушив связности. Докажите, что все ребра можно ориентировать так, чтобы получился сильно связный орграф.

6. Пусть G — турнир на $n^2 + 1$ вершине. Его стрелки раскрашены в два цвета так, что нет одноцветных циклов. Докажите, что в G есть одноцветный простой путь длины n.

7. Пусть G — турнир на 2020 вершинах. Докажите, что в нем существует такой гамильтонов путь $a_1a_2 \ldots a_{2020}$, что его концы соединены стрелкой a_1a_{2020}.