

### Серия 3. Паросочетания +

1. В графе есть вершина  $a$  степени 1 и вершина  $b$  степени 101, а степени всех остальных вершин равны 10. Докажите, что в этом графе есть  $ab$ -путь.

2. В графе  $G$  есть гамильтонов цикл. Докажите, что для любого множества  $S \subset V(G)$  в графе  $G - S$  не более чем  $|S|$  компонент связности.

3. Каждая из 100 девочек послала одному или нескольким из 100 мальчиков свою фотографию. Всего было послано больше 100 фотографий. Докажите, что какой-то из мальчиков может выкинуть все полученные им фотографии так, что при этом фотография каждой девочки останется у кого-либо из остальных мальчиков.

4. Из бумаги вырезан квадрат. Сверху на нем красным цветом нарисовано разбиение на 2021 равновеликих треугольников, а снизу зеленым цветом нарисовано разбиение на 2021 равновеликих треугольников. Докажите, что можно проткнуть квадрат 2021 булавками так, чтобы каждый зеленый и каждый красный треугольник был проткнут во внутренней точке ровно одной булавкой.

5. а) В компании 101 человек. Оказалось, что любых 100 из них можно разбить на 50 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых может быть в этой компании?

б) В компании 100 человек. Оказалось, что любых 98 из них можно разбить на 49 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых может быть в этой компании?

6. Докажите, что из любого связного графа с четным числом вершин можно удалить несколько ребер (возможно, 0) таким образом, чтобы в полученном графе степени всех вершин оказались нечетны.

7. Докажите теорему Холла, увеличивая максимальное паросочетание с помощью метода дополняющих путей.