

Серия 6.

1. На новогодний праздник пришли 99 детей. В гардеробе каждый из них обругал кого-то из остальных, причём никто не был обруган дважды. Когда Дед Мороз предложил всем загадать по два желания, первым желанием каждого ребенка было получить мороженое, а вторым — чтобы его обидчик не получил мороженое. Докажите, что у кого-то из детей сбудется ровно одно из загаданных желаний.

2. В стране 100 городов. Каждые два города соединены прямым рейсом одной из двух авиакомпаний: синей или зеленой. Для любых четырех городов оказалось, что среди всех рейсов между ними ровно три рейса выполняются самолетами синей авиакомпании. Докажите, что всего рейсов синей авиакомпании столько же, сколько рейсов зеленой авиакомпании.

3. Пусть G — связный граф, $W \subset V(G)$. Докажите, что два утверждения равносильны.

1° Существует остовное дерево, в котором все вершины множества W являются висячими.

2° Для любого множества вершин $U \subseteq W$ граф $G - U$ связан.

4. Пусть G — двусвязный, но не двудольный граф, $f \in V(G)$. Докажите, что в G есть простой нечетный цикл, проходящий через вершину a .

5. Постройте регулярный граф степени 2021, не имеющий ни одного остовного регулярного подграфа.

6. Докажите, что для любого графа G существует такой двудольный подграф G' , что:

a) $e(G') \geq \frac{e(G)}{2}$;

b) $d_{G'}(x) \geq \frac{d_G(x)}{2}$ для любой вершины $x \in V(G)$.