

Серия 7. Раскраски. Хроматический многочлен

1. В королевстве живут рыцари. Любые два из них либо враждуют (и такие среди них есть!), либо дружат, либо друг к другу безразличны. Друг врага рыцаря — враг этого рыцаря. Докажите, что хотя бы у одного рыцаря врагов больше, чем друзей.

2. а) Пусть T — дерево, $v(T) = n$. Докажите, что $\chi_T(k) = k(k-1)^{n-1}$.

б) Пусть G — граф с $\chi_G(k) = k(k-1)^{n-1}$. Докажите, что G — дерево с n вершинами.

3. G — граф с $v(G) = n$ и $e(G) = m$, а $\chi_G(k) = k^n - a \cdot k^{n-1} + \dots$. Найдите коэффициент a (выразите через данные числа).

4. В регулярном графе G степени d нечетное число вершин. Докажите, что $\chi'(G) = d + 1$.

5. Дан граф G с $e(G) > nv(G)$, где $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что этот граф не является $(n+1)$ -редуцируемым.

6. Пусть G — двудольный граф

а) Докажите, что G имеет регулярный двудольный надграф степени $\Delta(G)$ (добавлять можно как вершины, так и рёбра).

б) Докажите, что $\chi'(G) = \Delta(G)$ с помощью пункта а и теорем о паросочетаниях.

7. Дан граф, степени всех вершин которого равны 4. Его вершины покрашены в три цвета. Докажите, что есть цикл, вершины которого покрашены не более, чем в два цвета.