

### Серия 7. Раскраски. Хроматический многочлен

1. В королевстве живут рыцари. Любые два из них либо враждуют (и такие среди них есть!), либо дружат, либо друг к другу безразличны. Друг врага рыцаря — враг этого рыцаря. Докажите, что хотя бы у одного рыцаря врагов больше, чем друзей.

2. а) Пусть  $T$  — дерево,  $v(T) = n$ . Докажите, что  $\chi_T(k) = k(k-1)^{n-1}$ .

б) Пусть  $G$  — граф с  $\chi_G(k) = k(k-1)^{n-1}$ . Докажите, что  $G$  — дерево с  $n$  вершинами.

3.  $G$  — граф с  $v(G) = n$  и  $e(G) = m$ , а  $\chi_G(k) = k^n - a \cdot k^{n-1} + \dots$ . Найдите коэффициент  $a$  (выразите через данные числа).

4. В регулярном графе  $G$  степени  $d$  нечетное число вершин. Докажите, что  $\chi'(G) = d + 1$ .

5. Дан граф  $G$  с  $e(G) > nv(G)$ , где  $n \in \mathbb{N}$ . Докажите, что этот граф не является  $(n+1)$ -редуцируемым.

6. Пусть  $G$  — двудольный граф

а) Докажите, что  $G$  имеет регулярный двудольный надграф степени  $\Delta(G)$  (добавлять можно как вершины, так и рёбра).

б) Докажите, что  $\chi'(G) = \Delta(G)$  с помощью пункта а и теорем о паросочетаниях.

7. Дан граф, степени всех вершин которого равны 4. Его вершины покрашены в три цвета. Докажите, что есть цикл, вершины которого покрашены не более, чем в два цвета.