Серия 9.

1. В графе 2021 вершина, и каждая вершина имеет степень 4. На каждом ребре этого графа поставили стрелочку. Докажите, что найдётся вершина, в которую входит чётное число стрелок.

2. Докажите, что найдётся такой связный плоский граф G со сколь угодно большим числом вершин, что графы G и G^* изоморфны.

3. Вершины графа G покрашены так, что концы любого простого пути длины 2 покрашены в один цвет. Докажите, что вершины покрашены не более, чем в два цвета.

4. Все грани многогранника являются треугольниками. Каждая грань окрашена в черный или белый цвет так, что количество ребер, по которым граничат одноцветные грани, минимально. Пусть a и b — количества белых и черных граней, соответственно. Докажите, что $a \leq 1{,}5b$.

5. Докажите, что грани плоского графа можно правильным образом покрасить в 2 цвета тогда и только тогда, когда степени всех вершин четны.

6. Назовем p^n*-деревом* следующую конструкцию: из корня дерева выходят p ребер, ведущих к вершинам первого уровня; из каждой вершины первого уровня выходит еще по p ребер, ведущих к вершинам второго уровня и т.д., наконец, из каждой вершины $(n-1)$-го уровня ведут p ребер к вершинам n-го уровня, которые являются висячими.

Висячие вершины 4^n-дерева покрашены в 3000 цветов. Докажите, что из него можно выбрать 2^n-поддерево с тем же корнем так, чтобы висячие вершины поддерева были покрашены не более, чем в 1000 цветов.

7. В группе 20 студентов. Среди них есть студент, имеющий в группе одного друга, студент, имеющий двух друзей, ..., студент, имеющий в группе 14 друзей. Докажите, что найдутся трое студентов, любые двое из которых дружат.