

# Теория графов. Глава 10. Остовные деревья.

Д. В. Карпов

## Определение

- Пусть  $G$  — граф, в котором допустимы петли и кратные рёбра, а  $e = xy \in E(G)$ , причем  $x \neq y$ .
- Положим  $V(G * e) = (V(G) \setminus \{x, y\}) \cup \{w\}$ .
- Отображение  $\varphi : V(G) \rightarrow V(G * e)$  задано так, что  $\varphi(x) = \varphi(y) = w$  и  $\varphi(z) = z$  для остальных вершин  $z$ .
- Для любого ребра  $f = ab \in E(G - e)$  в графе  $G * e$  будет ребро  $\varphi(f)$  с концами  $\varphi(a)$  и  $\varphi(b)$ , а других рёбер в определяемом графе нет.
- Будем говорить, что граф  $G * e$  получен из  $G$  в результате **стягивания** ребра  $e$  и применять обозначение  $w = x * y$ .



- Отображение  $\varphi : E(G - e) \rightarrow E(G * e)$ , определенное выше — биекция. Далее мы будем отождествлять соответствующие друг другу при этой биекции рёбра.

## Количество остовных деревьев

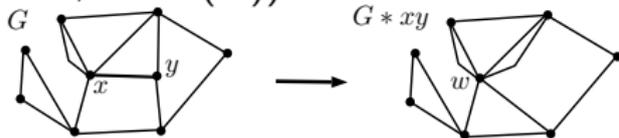
- Обозначим через  $st(G)$  количество остовных деревьев связного графа  $G$ .
- Следующий результат иногда называют *формулой Кэли*.

### Теорема 1

(А. Cayley, 1889.) Пусть  $G$  — граф, в котором возможны петли и кратные рёбра, а ребро  $e \in E(G)$  — не петля. Тогда  $st(G) = st(G - e) + st(G * e)$ .

**Доказательство.** • Количество остовных деревьев графа  $G$ , не содержащих ребра  $e$ , очевидно, равно  $st(G - e)$ .

• Между остовными деревьями, содержащими ребро  $e$  и остовными деревьями графа  $G * e$  существует взаимно однозначное соответствие  $T \rightarrow T * e$  (где  $T$  — остовное дерево графа  $G$ ,  $e \in E(T)$ ). □



- С помощью формулы Кэли можно вычислить количество остовных деревьев произвольного графа, однако этот процесс весьма небыстрый.
- Для ряда графов можно напрямую вычислить количество остовных деревьев. Наверное, наиболее известный результат в этом направлении — подсчёт количества остовных деревьев полного графа, который был получен Артуром Кэли также в 1889 году.
- Вместо первоначального доказательства со сложными рекуррентными соотношениями мы приведём ставшее даже более классическим доказательство Прюфера, опубликованное в 1918 году. Каждому дереву будет поставлен в соответствие так называемый *код Прюфера*.

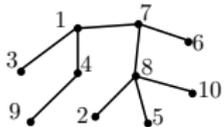
## Теорема 2

(А. Cayley, 1889.)  $st(K_n) = n^{n-2}$ .

**Доказательство.** (H. Prüfer, 1918.)

- Пусть  $V(K_n) = [1..n]$ . Мы построим взаимно однозначное соответствие между остовными деревьями  $K_n$  (то есть всеми деревьями на вершинах  $[1..n]$ .) и последовательностями длины  $n - 2$ , в которых каждый член принимает натуральное значение от 1 до  $n$ .
- Количество таких последовательностей равно в точности  $n^{n-2}$ .

- Пусть  $T$  — дерево на вершинах  $[1..n]$ . Построим соответствующую ему последовательность  $t_1, \dots, t_{n-2}$ .
- Пусть  $\ell_1$  — висячая вершина наименьшего номера в дереве  $T$ , тогда  $t_1$  — единственная смежная с  $\ell_1$  вершина дерева  $T$ ,  $T_1 = T - \ell_1$ .
- Затем найдём в  $T_1$  висячую вершину наименьшего номера  $\ell_2$ , пусть  $t_2$  — единственная смежная с  $\ell_2$  вершина дерева  $T_1$ ,  $T_2 = T_1 - \ell_2$ , и так далее, будем повторять процесс, пока не получим последовательность длины  $n - 2$  (при этом, останется дерево  $T_{n-2}$  на двух вершинах).



8 1 8 7 4 1 7 8

- Построим обратное соответствие. Пусть дана последовательность  $t_1, \dots, t_{n-2}$  с элементами из  $[1..n]$ .
- Отметим, что по построению каждая вершина  $x$  встречается в последовательности дерева  $T$  ровно  $d_T(x) - 1$  раз, поэтому вершины, которые в этой последовательности не встречаются, и есть висячие вершины дерева.
- Выберем такую вершину  $l_1$  с наименьшим номером и соединим её с  $t_1$ , после чего удалим  $l_1$  из списка номеров:  $V_1 = V \setminus \{l_1\}$ .
- Теперь выберем вершину  $l_2 \in V_1$  с наименьшим номером, которая не встречается в последовательности  $t_2, \dots, t_{n-2}$ , соединим  $l_2$  с  $t_2$  и положим  $V_2 = V_1 \setminus \{l_2\}$ . И так далее, повторим такую операцию  $n - 2$  раза.



8 1 8 7 4 1 7 8

Рис.: Дерево и его код Прюфера.

- В результате будет использована вся последовательность и проведено  $n - 2$  ребра, останется множество  $V_{n-2}$  из двух вершин и одно непроведённое ребро дерева  $T$ .

- Именно две вершины из  $V_{n-2}$  и нужно соединить ребром: их степени в имеющемся графе равны количеству вхождений этих вершин в последовательность  $t_1, \dots, t_{n-2}$ , то есть на 1 меньше, чем их степени в дереве  $T$ .

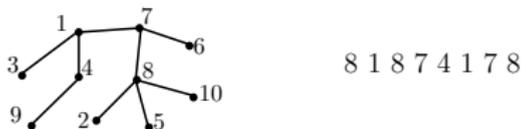


Рис.: Дерево и его код Прюфера.

## Теорема о промежуточных значениях

- Мы докажем, что на самом деле все количества висячих вершин в остовных деревьях связного графа  $G$  от минимума до максимума достижимы.
- Будем обозначать количество висячих вершин дерева  $T$  через  $u(T)$ .

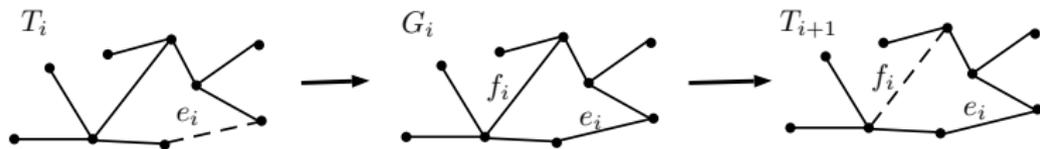
### Теорема 3

**(S. Schuster, 1983.)** Пусть связный граф  $G$  имеет остовные деревья с  $m$  и  $n$  висячими вершинами,  $m < n$ . Тогда для любого натурального  $k \in [m..n]$  существует остовное дерево графа  $G$  ровно с  $k$  висячими вершинами.

**Доказательство.** • Пусть  $T_1$  и  $T^*$  — остовные деревья с  $u(T_1) = m$  и  $u(T^*) = n$ .

- Начиная с дерева  $T_1$ , будем выполнять следующий шаг. Пусть уже построена последовательность остовных деревьев  $T_1, \dots, T_i$  графа  $G$ .
- Если  $T_i \neq T^*$ , то существует ребро  $e_i \in E(T^*) \setminus E(T_i)$ , пусть  $G_i = T_i + e_i$ .

- Если  $T_i \neq T^*$ , то существует ребро  $e_i \in E(T^*) \setminus E(T_i)$ , пусть  $G_i = T_i + e_i$ .



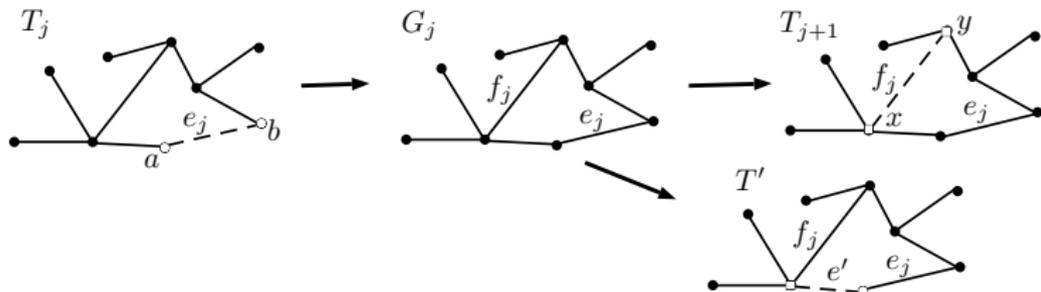
- В графе  $G_i$  есть ровно один простой цикл  $C_i$ , проходящий по ребру  $e_i$ . Понятно, что  $E(C_i) \not\subseteq E(T^*)$ , поэтому существует ребро  $f_i \in E(C_i) \setminus E(T^*)$ . Положим  $T_{i+1} = G_i - f_i = T_i + e_i - f_i$ .
- Поскольку в дереве  $T_{i+1}$  больше рёбер из  $E(T^*)$ , чем в  $T_i$ , в некоторый момент мы получим  $T_\ell = T^*$ .

Рассмотрим последовательность деревьев

$$T_1, T_2, \dots, T_\ell = T^*.$$

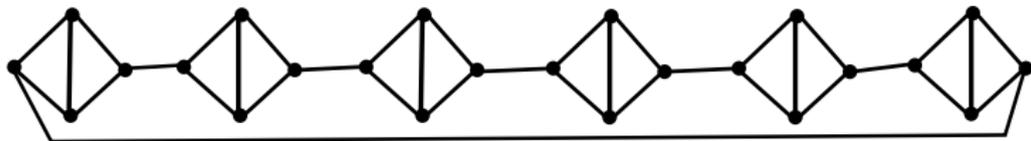
- Деревья  $T_i$  и  $T_{i+1}$  отличаются двумя рёбрами, поэтому  $|u(T_i) - u(T_{i+1})| \leq 2$ . Следовательно, количества висячих вершин деревьев нашей последовательности деревьев покрывают отрезок натурального ряда  $[m..n]$  с пробелами не более чем в одно число.

- Пусть  $t \in [m..n]$  и в нашей последовательности нет дерева с  $t$  вершинами.
- Тогда существует такое  $j$ , что  $u(T_j) = t - 1$  и  $u(T_{j+1}) = t + 1$ . По построению,  $T_{j+1} = G_j - f_j$  и  $T_j = G_j - e_j$ , пусть  $f_j = xy$ ,  $e_j = ab$ .
- Тогда  $d_{G_j}(a) = d_{G_j}(b) = 2$  (обе вершины  $a$  и  $b$  становятся висячими после удаления ребра  $e_j$ ),  $d_{G_j}(x) > 2$  и  $d_{G_j}(y) > 2$  (вершины  $x$  и  $y$  не становятся висячими после удаления ребра  $f_j$ ).
- Таким образом, в цикле  $C_j$  есть вершины степени 2 и есть вершины степени более 2, тогда одно из рёбер  $e' = uw \in E(C_j)$  таково, что  $d_{G_j}(u) > 2$  и  $d_{G_j}(w) = 2$ . Значит, в дереве  $T' = G_j - e'$  ровно одна из вершин  $V(C_j)$  — вершина  $w$  — становится висячей, то есть  $u(T') = t$ . □



## Теорема 4

(D. J. Kleitman, D. V. West, 1991.) В связном графе  $G$  с  $\delta(G) \geq 3$  существует остовное дерево с не менее чем  $\frac{v(G)}{4}$  листьями.



- Изображенный пример показывает, что эта оценка почти точная.

**Доказательство.** • Мы приведем алгоритм построения остовного дерева с соответствующим количеством висячих вершин. Алгоритм будет выделять в графе  $G$  дерево, последовательно, по шагам добавляя к нему вершины.

- Пусть в некоторый момент уже построено дерево  $F$  — подграф графа  $G$ .

## Определение

- Висячую вершину  $x$  дерева  $F$  назовем *мертвой*, если все вершины графа  $G$ , смежные с  $x$ , входят в дерево  $F$ .
  - Количество мёртвых вершин дерева  $F$  мы обозначим через  $b(F)$ .
  - Мертвые вершины останутся мертвыми висячими вершинами на всех последующих этапах построения.
- Для дерева  $F$  мы определим

$$\alpha(F) = \frac{3}{4}u(F) + \frac{1}{4}b(F) - \frac{1}{4}v(F).$$

Мы хотим построить такое остовное дерево  $T$  графа  $G$ , что  $\alpha(T) \geq 0$ .

- Так как в остовном дереве все висячие вершины — мертвые, то  $u(T) = b(T) = \frac{1}{4}v(G) + \alpha(T)$  и дерево  $T$  нас устраивает.

**Базовое дерево**  $F'$  — это дерево, в котором произвольная вершина  $a$  соединена со всеми  $k \geq 3$  вершинами из ее окрестности. Мы имеем  $v(F') = k + 1$ ,  $u(F') = k$

$$\alpha(F') \geq \frac{3}{4} \cdot k - \frac{1}{4} \cdot (k + 1) = \frac{2k - 1}{4} > \frac{5}{4}.$$

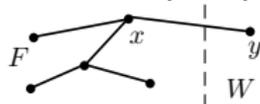
### Шаг алгоритма.

- Пусть после нескольких шагов построения мы получили дерево  $F$  (естественно  $V(F) \subset V(G)$ ,  $E(F) \subset E(G)$ ).
- Пусть в результате шага добавилось  $\Delta v$  вершин, количество висячих вершин увеличилось на  $\Delta u$ , а количество мертвых вершин — на  $\Delta b$ .
- Назовем **доходом** шага  $S$  величину  $P(S) = \frac{3}{4}\Delta u + \frac{1}{4}\Delta b - \frac{1}{4}\Delta v$ .
- Мы будем выполнять только шаги с неотрицательным доходом. При вычислении дохода шага мы будем полагать, что все добавленные вершины, про которые не сказано, что они мертвые, не являются мёртвыми. Это предположение лишь уменьшит доход шага.

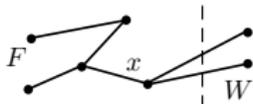
- Понятно, что для итогового остовного дерева  $T$  число  $\alpha(T)$  будет складываться из  $\alpha(F')$  (где  $F'$  — базовое дерево, с которого мы начали построение) и суммы доходов всех шагов.
- Остается построить дерево  $T$  с помощью шагов с неотрицательным доходом — тогда  $\alpha(T) \geq \alpha(F') > 0$  и, как объяснено ранее, дерево  $T$  нам подходит.
- Мы опишем несколько вариантов шага алгоритма. К очередному варианту мы будем переходить, только когда убедимся в невозможности всех предыдущих.
- Введём обозначение  $W = V(G) \setminus V(F)$ .
- Вот какие шаги мы будем выполнять.

**S1.** В дереве  $F$  есть невисячая вершина  $x$ , смежная с  $y \in W$ .

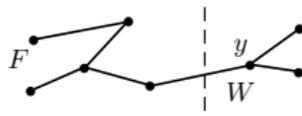
Добавим в дерево вершину  $y$ , получим  $\Delta v = \Delta u = 1$  и  $\rho(S1) \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ .



S1



S2



S3

**S2.** В дереве  $F$  есть вершина  $x$ , смежная хотя бы с двумя вершинами из  $W$ .

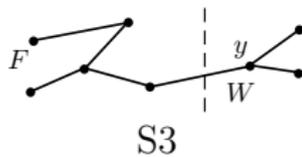
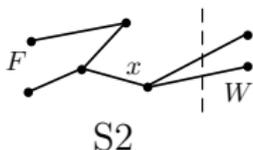
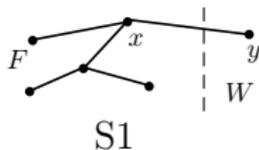
Добавим в дерево эти две вершины, получим  $\Delta v = 2$ ,  
 $\Delta u = 1$  и

$$p(S2) \geq \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

**S3.** Существует вершина  $u \in W$ , смежная с деревом  $F$  и хотя бы с двумя вершинами из  $W$ .

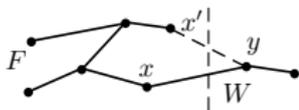
Добавим в дерево  $u$  и две смежные с ней вершины из  $W$ .  
Получим  $\Delta v = 3$ ,  $\Delta u = 1$  и

$$p(S3) \geq \frac{3}{4} - 3 \cdot \frac{1}{4} = 0.$$



#### S4. Существуют не вошедшие в дерево $F$ вершины.

- Тогда существует и смежная с деревом  $F$  вершина  $y \in W$ . Так как невозможно выполнить S3, то  $y$  смежна не более, чем с одной вершиной из  $W$ .
- Однако  $d_G(y) \geq 3$ , следовательно, вершина  $y$  смежна с двумя вершинами  $x, x' \in V(F)$ . Присоединим  $y$  к  $x$ . Так как невозможно выполнить шаги S1 и S2, вершина  $x'$  — висячая в дереве  $F$  и смежна ровно с одной вершиной из  $W$  — с вершиной  $y$ .
- Поэтому, в новом дереве вершина  $x'$  — мёртвая. Таким образом,  $\Delta v = 1$ ,  $\Delta b \geq 1$  и  $P(S4) \geq 0$ .



S4

- Ввиду конечности графа, построение закончится, и мы получим искомое остовное дерево графа  $G$ . □

## Матричная теорема о деревьях

- Для  $x, y \in V(G)$  через  $e_G(x, y)$  обозначается количество рёбер графа  $G$  между вершинами  $x$  и  $y$ .

### Определение

Пусть  $G$  — граф на множестве вершин  $[1..n]$ . *Лапласиан* графа  $G$  — это квадратная матрица  $L = (\ell_{i,j})_{i,j \in [1..n]}$ , заданная следующим образом:  $\ell_{i,i} = d_G(i)$ , и  $\ell_{i,j} = -e_G(i, j)$  при  $i \neq j$ .

- Из определения и отсутствия петель следует, что сумма элементов в любой строке и в любом столбце матрицы  $L$  равна 0.
- Таким образом, матрица  $L$  вырождена (сумма строк равна 0, значит, они ЛЗ). Следовательно,  $\det(L) = 0$ .
- Матрица  $L$  симметрична относительно главной диагонали.

### Определение

Пусть  $A \in M_n(K)$  — матрица с коэффициентами из поля  $K$ .

1) Через  $A_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_m}$  будем обозначать матрицу, полученную из  $A$  удалением строк с номерами  $i_1, \dots, i_k$  и столбцов с номерами  $j_1, \dots, j_m$ .

2) Число  $(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$  называется *алгебраическим*

*дополнением* элемента  $a_{i,j}$  матрицы  $A$ .

## Теорема 5

**(G. Kirhhoff, 1847.)** Пусть  $G$  — граф без петель (возможно, с кратными ребрами) на  $n \geq 2$  вершинах, а  $L$  — его лапласиан. Тогда  $st(G) = \det(L_{i;i})$  для любого  $i \in [1..n]$ .

**Доказательство.** • При одновременной перестановке пары строк и пары столбцов с такими же номерами знак определителя не меняется. Поэтому нумерация вершин не имеет значения, что мы будем использовать.

- Докажем, что  $st(G) = \det(L_{1;1})$ .
- При  $n = 1$  матрица  $L_{1;1}$  — пустая. Мы будем считать, что  $\det(L_{1;1}) = 1$  — именно столько остовных деревьев у графа на одной вершине.
- Если граф имеет более одной вершины и не имеет ребер, то его лапласиан — нулевая матрицы размера не менее чем  $2 \times 2$ , и алгебраическое дополнение любого ее элемента равно 0. Эти случаи будут базой индукции.
- Далее рассмотрим случай, когда  $G$  имеет ребро  $e$ . Будем считать, что для всех меньших графов утверждение теоремы доказано.

- Если  $d_G(1) = 0$  (то есть, вершина 1 — изолированная), то  $st(G) = 0$  ввиду несвязности графа.
- В этом случае в  $L$  первая строка и первый столбец состоят из 0.
- Поэтому,  $i$  строка  $L_{1;1}$  получается из соответствующей строки  $L$  вычеркиванием 0.
- Следовательно, сумма элементов в каждой строке  $L_{1;1}$  равна 0, откуда следует, что  $\text{rk}(L_{1;1}) < n - 1$ , а значит,  $\det(L_{1;1}) = 0$ .
- Случай разобран, далее считаем, что  $d_G(1) \geq 1$ .
- Тогда НУО ребро  $e$  соединяет вершины 1 и 2.

- По Теореме 1 мы знаем, что  $st(G) = st(G - e) + st(G * e)$ .
- Пусть  $H$  — граф, полученный из  $G * e$  удалением всех петель. Понятно, что  $st(H) = st(G * e)$ .
- Пусть  $L'$  и  $L^*$  — лапласианы графов  $G - e$  и  $H$  соответственно. Тогда по индукционному предположению  $st(G - e) = \det(L'_{1;1})$  и  $st(H) = \det(L^*_{1;1})$ .
- Остается доказать, что  $\det(L_{1;1}) = \det(L'_{1;1}) + \det(L^*_{1;1})$ .
- Как изменяется лапласиан графа при удалении ребра между вершинами 1 и 2?
- Из  $l_{1,1}$  и  $l_{2,2}$  вычитается по 1, а к  $l_{1,2}$  и  $l_{2,1}$  прибавляется по 1.
- При вычеркивании первого столбца и первой строчки получается, что  $L'_{1;1}$  отличается от  $L_{1;1}$  только элементом в левом верхнем углу — это  $l_{2,2} - 1$  у  $L'_{1;1}$  вместо  $l_{2,2}$  у  $L_{1;1}$ .
- Пусть вершина графа  $H$ , полученная объединением 1 и 2 вершин графа  $G$ , имеет номер 1, а остальные вершины  $H$  занумеруем так же, как в графе  $G$  — числами  $3, 4, \dots, n$  (пропустив индекс 2).
- Тогда все элементы матрицы  $L^*$  вне 1 строки и 1 столбца равны элементам  $L$  с соответствующим индексами.
- Значит,  $L^*_{1;1} = L_{1,2;1,2}$ .

- Разложим определитель  $L_{1,1}$  по первой строке (она же вторая строка матрицы  $L$  с удаленным 1 элементом), используя обозначения элементов матрицы  $L$  (но учитывая, что вторая строка матрицы  $L$  — это первая строка  $L_{1,1}$ , а  $j \geq 2$  столбец  $L$  — это  $j - 1$  столбец матрицы  $L_{1,1}$ ):

$$\det(L_{1,1}) = \sum_{j=2}^n (-1)^{1+(j-1)} \ell_{2,j} \cdot \det(L_{1,2;1,j}) =$$

$$\det(L_{1,2;1,2}) + \left( (\ell_{2,2} - 1) \cdot \det(L_{1,2;1,2}) + \sum_{j=3}^n (-1)^{1+(j-1)} \ell_{2,j} \cdot \det(L_{1,2;1,j}) \right) =$$

$$\det(L_{1,1}^*) + \det(L'_{1,1}). \quad \square$$

## Следствие 1

Пусть  $L$  — лапласиан связного графа  $G$  без петель на  $n \geq 2$  вершинах. Тогда  $st(G) = (-1)^{i+j} \det(L_{i;j})$  для любых  $i, j \in [1..n]$ .

**Доказательство.** • Так как сумма элементов любой строки матрицы  $L$  равна 0, система уравнений

$$LX = 0 \quad (*)$$

имеет ненулевое решение — столбец из  $n$  единиц.

• Следовательно, матрица  $L$  вырождена, а значит,  $\text{rk}(L) \leq n - 1$  и  $\det(L) = 0$ .

• По Теореме 5 мы знаем, что  $\det(L_{i;i}) = st(G) \neq 0$  (так как граф  $G$  связен).

• Таким образом, матрица  $L$  имеет ненулевой минор порядка  $n - 1$ , а значит,  $\text{rk}(L) = n - 1$ .

• Размерность пространства решений системы (\*) равна  $n - \text{rk}(L) = 1$ .

• Значит, все решения пропорциональны вектору из  $n$  единиц, то есть все  $n$  координат любого решения (\*) равны.

- Введем обозначение для алгебраических дополнений элементов матрицы  $L$ : пусть  $a_{i,j} := (-1)^{i+j} \det(L_{i;j})$ .
- Напомним, что сумма произведений элементов строки матрицы на их алгебраические дополнения равна ее определителю, а сумма произведений элементов строки матрицы на алгебраические дополнения другой строки равна 0.

- Так как  $\det(L) = 0$ , мы имеем

$$\sum_{j=1}^n \ell_{k,j} a_{k,j} = \det(L), \quad , \sum_{j=1}^n \ell_{s,j} a_{k,j} = 0 \text{ при } s \neq k.$$

- Таким образом, столбец из алгебраических дополнений любой строки  $(a_{k,1}, \dots, a_{k,n})^T$  является решением системы (\*).
- Следовательно, алгебраические дополнения всех элементов одной строки равны и  $(-1)^{i+k} \det(L_{k;i}) = a_{k,i} = a_{k,k} = \det(L_{k;k}) = st(G)$  по Теореме 5. □