

Теория графов. Глава 2. Пути и циклы.

Д. В. Карпов

2024

Эйлеров цикл

- В этом разделе в рассматриваемых графах возможны кратные рёбра и петли.

Определение

- 1) *Эйлеров путь* в графе G — это путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз.
 - 2) *Эйлеров цикл* в графе G — это цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз.
 - 3) Граф G — *эйлеров*, если в нём есть эйлеров цикл.
- Разумеется, эйлеров путь и цикл в графе могут иметь самопересечения по вершинам.

Теорема 1

Связный граф G — эйлеров, если и только если степени всех вершин G четны.

Доказательство теоремы 1

⇒. Каждый раз, проходя через вершину v , эйлеров цикл проходит по двум ребрам, поэтому $d_G(v)$ четна.

⇐. Начнем путь в произвольной вершине a и будем идти, удаляя из графа пройденные ребра, пока это возможно.

- Так как все степени четны, наш путь обязательно закончится в вершине a . В результате получится цикл Z .

- Пусть G_1, \dots, G_k — компоненты графа $G - E(Z)$.

Степени всех вершин каждой из компонент четны.

Поэтому, в каждом графе G_i есть эйлеров цикл Z_i .

- Поскольку граф G связан, то для каждого $i \in [1..k]$ существует вершина $u_i \in V(G_i)$, лежащая на цикле Z .

Тогда по вершине u_i несложно состыковать циклы Z и Z_i в один.

- Проделав такую операцию последовательно для циклов Z_1, \dots, Z_k , мы получим искомым эйлеров цикл в графе G . □

Эйлеров путь

Следствие

Связный граф G имеет эйлеров путь, если и только если в графе G нет вершин нечетной степени или таких вершин ровно две.

Доказательство.

\Rightarrow . Пусть ЭП имеет концы a и b . Если $a = b$, то наш путь — ЭЦ, а значит, степени всех вершин четны. Если же $a \neq b$, то в графе ровно две вершины нечетной степени — концы пути a и b .

\Leftarrow . Количество вершин нечетной степени в графе четно. Если их нет, то в графе есть даже ЭЦ.

• Пусть в графе G ровно две вершины нечетной степени a и b . Добавим в граф ребро ab (если такое ребро есть, то добавим еще одно). Мы получили связный граф, в котором все вершины имеют четную степень и по теореме 2 есть ЭЦ C . Удалим из цикла C добавленное ребро ab и получим ЭП с концами a и b .

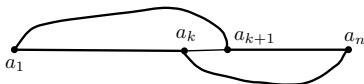
Определение

- 1) *Гамильтонов путь* в графе G — это простой путь, проходящий по каждой вершине графа.
- 2) *Гамильтонов цикл* в графе G — это простой цикл, проходящий по каждой вершине графа.
- 3) Граф называется *гамильтоновым*, если в нем есть гамильтонов цикл.

Лемма 1

Пусть $n > 2$, $a_1 \dots a_n$ — максимальный путь в графе G , причём $d_G(a_1) + d_G(a_n) \geq n$. Тогда в графе есть цикл длины n .

Доказательство Леммы 1



- Если вершины a_1 и a_n смежны, то $a_1 a_2 \dots a_n$ — искомый цикл.
- Пусть a_1 и a_n несмежны. Понятно, что $N_G(a_1), N_G(a_n) \subset \{a_2, \dots, a_{n-1}\}$.
- Пусть вершина a_n смежна с a_k , а вершина a_1 смежна с a_{k+1} . Тогда в графе есть цикл из n вершин: $a_1 a_2 \dots a_k a_n a_{n-1} \dots a_{k+1}$ (см. рисунок).
- Пусть $N_G(a_n) = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_\ell}\}$, тогда либо в графе есть цикл длины n , либо $a_{i_1+1}, \dots, a_{i_\ell+1} \notin N_G(a_1)$, следовательно, $d_G(a_1) \leq n - 1 - d_G(a_n)$.
- Противоречие завершает доказательство леммы. □

Теорема 2

(О. Ore, 1960.) 1) Если для любых двух несмежных вершин $u, v \in V(G)$ выполняется $d_G(u) + d_G(v) \geq v(G) - 1$, то в графе G есть гамильтонов путь.

2) Если $v(G) > 2$ и для любых двух несмежных вершин $u, v \in V(G)$ выполняется $d_G(u) + d_G(v) \geq v(G)$, то в графе G есть гамильтонов цикл.

Доказательство. 1) • Случай, когда в графе G ровно две вершины, очевиден. Далее пусть $v(G) > 2$.

• *Граф G связан.* (Пусть a и b — две несмежные вершины графа, тогда $d_G(a) + d_G(b) \geq v(G) - 1$, откуда следует, что $N_G(a) \cap N_G(b) \neq \emptyset$, то есть, вершины a и b связаны.)

- Пусть $a_1 \dots a_n$ — наибольший простой путь графа G .

Поскольку граф G связан и $v(G) > 2$, то $n \geq 3$.

Предположим, что $n \leq v(G) - 1$.

- В графе есть цикл на n вершинах: при $a_1 a_n \in E(G)$ это очевидно, а при $a_1 a_n \notin E(G)$ мы имеем

$d_G(a_1) + d_G(a_n) \geq v(G) - 1 \geq n$ и цикл существует по лемме 1 в графе G есть цикл Z из n вершин.

- Так как граф связан, существует не вошедшая в этот цикл вершина, смежная хотя бы с одной из вершин цикла. Тогда и путь на $n + 1$ вершине, противоречие. Таким образом, в графе есть ГП.

2) • Гамильтонов путь в графе уже есть по пункту 1.

Пусть $n = v(G)$ и это путь $a_1 \dots a_n$.

- Если вершины a_1 и a_n смежны, то $a_1 \dots a_n$ — ГЦ. Если $a_1 a_n \notin E(G)$, то $d_G(a_1) + d_G(a_n) \geq v(G) = n$ и ГЦ есть по Лемме 1. □

А теперь приведем прямое следствие теоремы Оре.

Следствие

(G. A. Dirac, 1952.) 1) Если $\delta(G) \geq \frac{v(G)-1}{2}$, то в графе G есть гамильтонов путь.

2) Если $\delta(G) \geq \frac{v(G)}{2}$, то в графе G есть гамильтонов цикл.

Лемма 2

Пусть $ab \notin E(G)$, $d_G(a) + d_G(b) \geq v(G)$. Тогда граф G — гамильтонов, если и только если граф $G + ab$ — гамильтонов.

Доказательство.

\Rightarrow . Очевидно.

\Leftarrow . • Пусть граф $G + ab$ — гамильтонов. Если ГЦ в графе $G + ab$ не проходит по ребру ab , то этот цикл есть и в графе G .

• Пусть ГЦ в графе $G + ab$ проходит по ребру ab . Тогда в графе G есть гамильтонов ab -путь. По лемме 1 в графе G существует ГЦ. □

Замыкание графа: метод Хватала

Определение

Рассмотрим произвольный граф G . Если существуют две несмежные вершины $a, b \in V(G)$, для которых $d_G(a) + d_G(b) \geq v(G)$, то добавим в граф ребро ab . Далее продолжим процесс с полученным графом, и так далее, до тех пор, пока это возможно. Полученный в результате граф назовем *замыканием* графа G и обозначим через $C(G)$.

- Непосредственно из леммы 2 следует достаточно интересный результат:

Следствие

(V. Chvatal, 1974.) Граф G гамильтонов, если и только если его замыкание $C(G)$ — гамильтонов граф.

- Найти гамильтонов цикл в замыкании обычно гораздо проще, чем в исходном графе.

Лемма 3

Замыкание графа G определено однозначно (не зависит от порядка добавления рёбер).

Доказательство.

- Пусть в результате двух разных цепочек добавления рёбер были получены различные графы G_1 и G_2 .
- Тогда есть ребра, добавленные при построении G_1 , которых не добавили при построении G_2 . Рассмотрим такое ребро ab , добавленное самым первым.
- Пусть G_0 — граф, к которому добавили ab . Тогда $d_{G_0}(a) + d_{G_0}(b) \geq v(G)$.
- Однако, все рёбра, которые добавили к G при построении G_0 , добавлены и при построении G_2 (мы так выбрали ребро $ab!$). Поэтому, $d_{G_2}(a) + d_{G_2}(b) \geq v(G)$, а значит, процесс построения замыкания, давший нам G_2 , не закончен: нужно добавить ребро ab . Противоречие. \square

Критерий Хватала

Теорема 3

(V. Chvatal, 1972) Пусть $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ — последовательность степеней вершин графа G , а для каждого $i \in [1..n - 1]$ выполняется неравенство $d_i + d_{n-i} \geq n$. Тогда граф G — гамильтонов.

Доказательство.

- Докажем, что замыкание $C(G)$ — гамильтонов граф.
- Пусть $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, причем $d_G(v_i) = d_i$. При $i + j \geq n$

$$d_G(v_i) + d_G(v_j) = d_i + d_j \geq d_i + d_{n-i} \geq n,$$

следовательно, вершины v_i и v_j смежны в $C(G)$.

- Теперь легко построить ГЦ в $C(G)$.

При $n = 2m + 1$ он будет иметь вид

$$v_1 v_{2m} v_2 v_{2m-1} \dots v_m v_{m+1} v_{2m+1}.$$

При $n = 2m$ цикл будет иметь вид

$$v_1 v_{2m-1} v_2 v_{2m-2} \dots v_{m-1} v_{m+1} v_m v_{2m}.$$

Определение

Для графа G и натурального числа d обозначим через G^d граф на вершинах из $V(G)$, в котором вершины x и y смежны тогда и только тогда, когда $\text{dist}_G(x, y) \leq d$.

Теорема 4

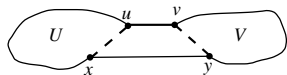
(G. Chartrand, S. F. Kapoor, 1969.) Для любого связного графа G с $v(G) \geq 3$ и ребра $e \in E(G)$ в графе G^3 существует гамильтонов цикл, содержащий ребро e .

Доказательство. • Достаточно доказать теорему для случая, когда G — дерево (иначе выделим остовное дерево, содержащее ребро e).

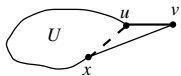
• Мы докажем утверждение индукцией по количеству вершин. База для дерева на трех или четырех вершинах очевидна (тогда G^3 — это полный граф).

Доказательство теоремы Чартранда-Капура: переход

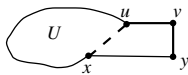
- Пусть для меньших чем G всех деревьев теорема доказана.
- Пусть $e = uv$, тогда в графе $G - uv$ две компоненты связности $U \ni u$ и $V \ni v$. Пусть $G_u = G(U)$ и $G_v = G(V)$. НУО $|U| \geq 3$. Тогда в G_u^3 есть ГЦ, содержащий инцидентное u ребро $ux \in E(G)$.
- Если $|V| \geq 3$, то аналогично мы построим ГЦ в графе G_v^3 , содержащий инцидентное вершине v ребро $vy \in E(G)$ и соединим эти два цикла в один, заменив рёбра ux и vy на uv и xu , см. рисунок а (из $\text{dist}_G(x, y) = 3$ следует $xu \in E(G^3)$).



а



б



с

Остаются очевидные случаи, когда $|V| < 3$. При $V = \{v\}$ мы заменим в ГЦ графа G_u^3 ребро ux на uv и vx (рис. б). При $V = \{v, y\}$, очевидно, $vy \in E(G)$ и мы заменим в ГЦ графа G_u^3 ребро ux на uv , vy и xu (рис. с). □

Материалы курса можно найти вот здесь:

`logic.pdmi.ras.ru/~dvk/ITMO/`