

Теория графов. Глава 7. Орграфы.

Д. В. Карпов

2025

Определение

1) Мы будем называть рёбра орграфа *стрелками*, а множество всех стрелок ориентированного графа D будем обозначать через $A(D)$. Будем использовать обозначение $a(D) = |A(D)|$.

2) Через $E(D)$ мы будем обозначать множество ребер орграфа D без ориентации (каждую стрелку заменим обычным неориентированным ребром).

3) Для непересекающихся множеств $X, Y \subset V(D)$ через $A_D(X, Y)$ мы будем обозначать множества всех стрелок орграфа D с началом в X и концом в Y . Будем использовать обозначение $a_D(X, Y) = |A_D(X, Y)|$.

4) Запись $e = xy \in A(D)$ будет обозначать, что e — стрелка с началом x и концом y . В случае, когда допускаются кратные стрелки, эта запись не утверждает, что e — единственная стрелка с началом x и концом y .

- Если не оговорено обратное, мы будем считать, что в орграфе нет петель и сонаправленных кратных стрелок (у которых совпадают и начала, и концы).

- Пары *встречных* стрелок (вида uv и vu), как правило, допускаются.

- **Подграф** орграфа (в частности, **индуцированный подграф**) определяется так же, как для неориентированных графов.

Индукцированный подграф орграфа D на множестве вершин $X \subset V(D)$ будем обозначать через $D(X)$.

- Для любой вершины v орграфа D мы через $N_D^+(v)$ обозначим множество вершин орграфа D , в которые выходят стрелки из v , а через $N_D^-(v)$ обозначим множество вершин орграфа D , из которых выходят стрелки в v .

- $N_D(v) = N_D^+(v) \cup N_D^-(v)$ — **окрестность** вершины v .

- **Степень** вершины $x \in V(D)$ — это количество инцидентных ей рёбер из $E(D)$.

- Для вершины $x \in V(D)$ через $d_D^+(x)$ мы будем обозначать **исходящую степень** вершины v , то есть, количество стрелок орграфа D , выходящих из вершины x , а через $d_D^-(x)$ мы будем обозначать **входящую степень** вершины v — количество стрелок орграфа D , входящих в вершину x .

- $\delta(D)$, $\delta^+(D)$ и $\delta^-(D)$ — **минимальные** степень, исходящую степень и входящую степень вершин D соответственно.

Аналогично, $\Delta(D)$, $\Delta^+(D)$ и $\Delta^-(D)$ — это **максимальные** степень, исходящая степень и входящая степень орграфа D .

- Нетрудно понять, что для орграфа D и вершины $v \in V(D)$ выполнено $d_D(v) = d_D^+(v) + d_D^-(v)$.
- Если в орграфе нет кратных стрелок, то $d_D^+(v) = |N_D^+(v)|$, $d_D^-(v) = |N_D^-(v)|$, $d_D(v) = |N_D(v)|$.
- **Пути** и **циклы** в ориентированном графе отличаются от обычного графа тем, что каждая стрелка может быть пройдена только в соответствии с направлением от начала к концу. Таким образом, у каждого пути в орграфе есть **начало** и **конец**, а у каждого цикла — фиксированное **направление обхода**.
- **Расстояние** $\text{dist}_D(x, y)$ от вершины x до вершины y в орграфе D есть длина кратчайшего x -пути. В орграфе D возможно, что $\text{dist}_D(x, y) \neq \text{dist}_D(y, x)$.
- Удаление вершин и стрелок из орграфа мы определим и будем обозначать так же, как удаление вершин и рёбер из неориентированного графа.
- Аналогично неориентированному графу определяется стягивание стрелки.

- Для неориентированного графа H его **ориентацией** является любой орграф $\vec{H}$ с $V(\vec{H}) = V(H)$, стрелки которого — это ориентированные каким-либо способом рёбра из $E(H)$. Таким образом, у графа H есть $2^{E(H)}$ ориентаций.
- Для орграфа D определим неориентированный граф $\underline{D}$ с множеством вершин $V(D)$ и множеством рёбер $E(D)$.
- Иногда допускается **частичная ориентация** рёбер графа G , когда часть рёбер остается неориентированными, по ним разрешен проход в обе стороны.

Определение

Вершины a и b ориентированного графа G назовем **связанными**, если в графе G существуют пути из a в b и из b в a .

Ориентированный граф G называется **сильно связным**, если любые две его вершины связаны.

- Отношение связности вершин ориентированного графа G является отношением эквивалентности (рефлексивно, симметрично, транзитивно).
- Множество вершин $V(G)$ разбивается на классы попарно связанных вершин, которые мы будем называть **компонентами сильной связности**.
- Для краткости, вместо “компонента сильной связности” будем писать КСС.
- Построим для орграфа G **орграф компонент сильной связности** $C(G)$, вершины которого — КСС G . Проведем в орграфе $C(G)$ стрелку $V_i \rightarrow V_j$ тогда и только тогда, когда в орграфе G есть хотя бы одна стрелка, направленная от КСС V_i к V_j .

Определение

Орграф называется *ациклическим*, если он не имеет ориентированных циклов.

Лемма 1

Для любого ориентированного графа G выполняются следующие утверждения.

- 1) $C(G)$ — ациклический орграф.
- 2) Для любой компоненты сильной связности V_i индуцированный подграф $G(V_i)$ сильно связан.

Доказательство. 1) Предположим противное, пусть в $C(G)$ есть цикл $V_1 V_2 \dots V_k$. Тогда в орграфе G все вершины из $\bigcup_{i=1}^k V_i$ попарно связаны и, следовательно, входят в одну КСС. Противоречие.

2) • Пусть $w_1, w_2 \in V_i$. Тогда существует $w_1 w_2$ -путь S и $w_2 w_1$ -путь T в орграфе G .

• Понятно, что все вершины из $V(S) \cup V(T) \ni w_1, w_2$ связаны в орграфе G , следовательно, $V(S) \cup V(T) \subset V_i$, то есть, вершины w_1 и w_2 связаны в $G(V_i)$. Таким образом, орграф $G(V_i)$ сильно связан.

Определение

Пусть V_i — компонента сильной связности ориентированного графа G .

- Назовем эту компоненту *промежуточной*, если в графе $C(G)$ существует стрелка, входящая в V_i , и существует стрелка, выходящая из V_i .
- В противном случае назовем компоненту V_i *крайней*.
- Так как в $C(G)$ нет циклов, любой максимальный путь в этом графе начинается в вершине, из которой все ребра выходят, и заканчивается в вершине, в которую все ребра входят. Такие вершины соответствуют крайним компонентам сильной связности.
- Таким образом, любая промежуточная компонента сильной связности орграфа G лежит в $C(G)$ на пути между какими-то двумя крайними компонентами.

Лемма 2

Орграф D сильно связан, если и только если для любого множества $W \subsetneq V(D)$ существует стрелка из W в $V(D) \setminus W$.

Доказательство. $\Rightarrow$. Если из некоторого множества $W \subset V(D)$ нет стрелки в $V(D) \setminus W$, то невозможно попасть из W в $V(D) \setminus W$, что противоречит сильной связности D .

$\Leftarrow$. Если орграф не является сильно связным, то он имеет крайнюю компоненту сильной связности W , из которой не выходит ни одной стрелки в $V(D) \setminus W$, что противоречит условию. $\square$

Лемма 3

Орграф D является ациклическим, если и только если его вершины можно занумеровать так, что любая стрелка ведет из вершины с меньшим номером к вершине с большим номером.

Доказательство. $\Leftarrow$. Если такая нумерация существует, отсутствие циклов очевидно: ни из какой вершины нельзя попасть в вершину с меньшим номером.

$\Rightarrow$. Существование нумерации для орграфа, не являющегося сильно связным, докажем по индукции.

- База для одновершинного орграфа очевидна.
- Понятно, что в ациклическом орграфе есть вершина a , из которой не выходит ни одной стрелки. По индукционному предположению построим нумерацию для (очевидно, ациклического) орграфа $D - a$, после чего присвоим вершине a последний, самый большой номер. $\square$

Определение

Пусть T — такой орграф, что неориентированный граф $\underline{T}$ — дерево, $a \in V(T)$.

- 1) Если из каждой вершины орграфа T , кроме a , выходит ровно одно ребро, то T называется *входящим деревом* вершины a .
- 2) Если в каждую вершину орграфа T , кроме a , входит ровно одно ребро, то T называется *исходящим деревом* вершины a .

Лемма 4

- 1) Если D — входящее дерево вершины a , то из каждой вершины D существует путь до a .
- 2) Если D — исходящее дерево вершины a , то из a существует путь до каждой вершины D .

Доказательство. 1) Пусть $x \in V(D)$. Построим максимальный путь P с началом в x . Так как D — ациклический орграф, из конца пути P не выходит ни одной стрелки, значит, этот конец — вершина a .

- 2) Аналогично.

Теорема 1

Пусть G — орграф, $a \in V(G)$, V_a^- — множество всех вершин G , из которых можно дойти до a , а V_a^+ — множество всех вершин G , до которых можно дойти из a (мы считаем, что $a \in V_a^-$ и $a \in V_a^+$). Тогда существует входящее дерево вершины a с множеством вершин V_a^- и исходящее дерево вершины a с множеством вершин V_a^+ .

Доказательство. Построим входящее дерево, исходящее строится аналогично.

- Положим $L_0 = \{a\}$, пусть $L_k = \{x : \text{dist}_G(x, a) = k\}$. Если m — наибольшее расстояние от вершины множества V_a^- до a , то $\bigcup_{k=0}^m L_k = V_a^-$.
- Для всех $k > 0$ проведем от каждой вершины $x \in L_k$ ровно одну стрелку, выходящую из x к вершине уровня L_{k-1} — предку x (такая стрелка, очевидно, есть). Обозначим через D орграф с построенным множеством стрелок. В D из каждой вершины, кроме a , выходит ровно одна стрелка.

- Предположим, что в $\underline{D}$ есть цикл Z . Пусть v — вершина наибольшего уровня L_m в Z .
- Тогда оба соседа v в Z должны лежать в уровнях не более m . Но по построению v смежна в $\underline{D}$ только с одной вершиной уровня не более m — со своим предком. Противоречие.
- Значит, $\underline{D}$ ацикличен, тогда D — входящее дерево вершины a . □

Следствие 1

В сильно связном орграфе G для любой вершины a существует исходящее и входящее деревья вершины a с множеством вершин $V(G)$.

Доказательство. Так как орграф G сильно связан,
 $V_a^- = V_a^+ = V(G)$. □

Теорема 2

Для сильно связного орграфа G на n вершинах выполняются следующие утверждения.

- 1) Существует сильно связный остовный подграф орграфа G , в котором не более $2n - 2$ стрелок.*
- 2) Пусть k — длина наибольшего простого цикла в орграфе G . Тогда существует сильно связный остовный подграф орграфа G , в котором не более $2n - k$ стрелок.*

Доказательство. 1) Пусть $v \in V(G)$, а T_v^+ и T_v^- — это исходящее и входящее деревья вершины v , соответственно (они существуют по Следствию 1).

- Понятно, что остовный подграф орграфа G , полученный объединением этих двух деревьев, будет сильно связным и содержит не более $2n - 2$ стрелок.

2) Пусть Z — простой цикл длины k в G .

- Построим новый орграф G' , объединив все вершины цикла Z в одну новую вершину z . (Все стрелки, соединяющие остальные вершины орграфа G с вершинами цикла Z , в новом графе будут соединять эти же вершины с z . Возможно, в орграфе G' появятся кратные стрелки.)
- Орграф G' на $n - k + 1$ вершинах также будет сильно связным.
- По пункту 1 в нем можно оставить не более $2(n - k)$ стрелок, обеспечивающих его сильную связность. В орграфе G к соответствующим стрелкам мы добавим k стрелок цикла Z и получим сильно связный остов, в котором не более $2(n - k) + k = 2n - k$ стрелок. □

Следствие

Если в сильно связном орграфе G между любыми двумя вершинами проведено не более одной стрелки, то существует сильно связный остовный подграф орграфа G , в котором не более $2n - 3$ стрелок.

Доказательство.

- Очевидно, в сильно связном орграфе есть простой цикл. Пусть k — длина наибольшего простого цикла в G . Из условия следует, что $k \geq 3$.
- По пункту 2 Теоремы 2 у G существует сильно связный остовный подграф, в котором не более чем $2(n - k) + k \leq 2n - 3$ стрелок. □

Гамильтоновы циклы в орграфе

- *Гамильтонов цикл* в орграфе — это простой ориентированный цикл, проходящий по всем вершинам.
- Можно обобщить на орграфы и один из классических критериев гамильтоновости — критерий Дирака. С критерием Оре это сделать не получается.

Лемма 5

Пусть орграф G таков, что $\max(\delta^+(G), \delta^-(G)) = k$. Тогда G имеет простой путь длины хотя бы k и простой цикл длины хотя бы $k + 1$.

Доказательство. ● НУО $\delta^+(G) \geq k$.

- Рассмотрим путь максимальной длины $P = a_1 a_2 \dots a_n$ в орграфе G . Из его последней вершины a_n выходит хотя бы k стрелок. Так как путь P нельзя продлить, все эти стрелки выходят в $a_1, \dots, a_{n-1}$.

- Пусть a_m — вершина наименьшего номера, для которой $a_n a_m \in A(G)$. Тогда в множестве $\{a_m, \dots, a_{n-1}\}$ лежат не менее k концов выходящих из a_n стрелок, следовательно, в этом множестве хотя бы k вершин. Значит, путь и цикл $a_m \dots a_{n-1} a_n$ нам подходят.

Теорема 3

(A. Ghouila-Houri, 1960.) Пусть орграф G таков, что $\min(\delta^+(G), \delta^-(G)) \geq \frac{\nu(G)}{2}$. Тогда G имеет гамильтонов цикл.

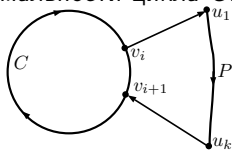
Доказательство. • Рассмотрим максимальный цикл $C = v_1 \dots v_m$. Тогда $m \geq \frac{\nu(G)}{2} + 1$ по Лемме 5. Нумерацию вершин считаем циклической по модулю m .

• Предположим, что цикл C не является гамильтоновым и рассмотрим орграф $H = G - V(C)$. Пусть $P = u_1 \dots u_k$ — максимальный путь в H .

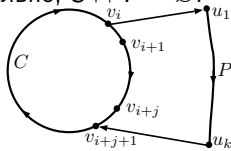
• Тогда $m + k \leq \nu(G)$ и $k \leq \frac{\nu(G)}{2} - 1$.

• Положим $S = \{i : v_i u_1 \in A(G)\}$ и $T = \{i : u_k v_{i+1} \in A(G)\}$.

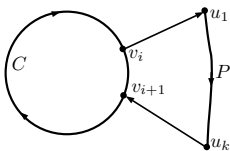
• Если $S \cap T \ni i$, то мы увеличим цикл C , заменив стрелку $v_i v_{i+1}$ на путь $v_i u_1 P u_k v_{i+1}$ (см. рис. а), что противоречит максимальнойности цикла C . Следовательно, $S \cap T = \emptyset$.



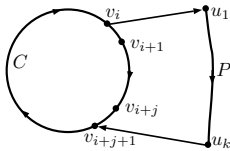
а



б



а



б

- В силу максимальности пути P мы имеем $N_G^+(u_k) \subset V(C) \cup V(P)$ и $N_G^-(u_1) \subset V(C) \cup V(P)$.
- Следовательно, $\frac{v(G)}{2} \leq d_G^+(u_k) \leq k - 1 + |T|$ и $\frac{v(G)}{2} \leq d_G^-(u_1) \leq k - 1 + |S|$.
- Так как $S \cap T = \emptyset$ и $k \leq \frac{v(G)}{2} - 1$, получим $|S| \geq 1$, $|T| \geq 1$ и $|S \cup T| = |S| + |T| \geq v(G) - 2k + 2 \geq m - k + 2$.
- Существуют такие индексы i и j , что $i \in S$, $i + 1, \dots, i + j - 1 \notin S \cup T$ и $i + j \in T$. По доказанному выше $j - 1 \leq k - 2$.
- Тогда $v_i u_1, u_k v_{i+j+1} \in A(G)$ и мы получаем цикл $v_{i+j+1} C v_i u_1 P u_k$ (см. рис. б), в котором хотя бы на одну вершину больше чем в C . Противоречие.

Турниры

Определение

Турниром, называется орграф, в котором любые две вершины соединены ровно одной стрелкой.

- Такие орграфы называют турнирами, так как с их помощью удобно изображать однокруговые турниры без ничьих.

Лемма 6

В турнире существует гамильтонов путь.

Доказательство. • Рассмотрим самый длинный простой путь $P = a_1 \dots a_k$ в турнире T .

- Предположим, что он не гамильтонов и рассмотрим не вошедшую в P вершину $b \in V(T)$.
- Если $ba_1 \in A(T)$, то добавим b в начало пути. Если $a_nb \in A(T)$, то добавим b в конец пути. Так как это противоречит максимальнойности P , $a_1b \in A(T)$ и $ba_n \in A(T)$
- Тогда существует такое $i \leq k - 1$, что $a_ib \in A(T)$ и $ba_{i+1} \in A(T)$. В этом случае можно вставить b между a_i и a_{i+1} и увеличить путь. Противоречие с максимальнойностью P .
- Значит, наше предположение неверно и P — гамильтонов путь.

Следствие 2

Структура компонент сильной связности турнирного графа представляет собой простой путь $V_1 V_2 \dots V_m$, в котором для любых двух различных компонент V_i и V_j , где $i < j$, все ребра графа ориентированы от V_i к V_j .

Доказательство. • Между любыми двумя компонентами турнира T есть стрелка. Следовательно, орграф КСС $C(T)$ — турнир.

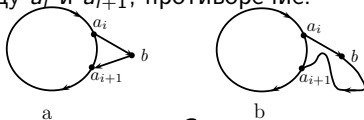
- Пусть $V_1, \dots, V_m$ — все КСС турнира T . По Лемме 6 в $C(T)$ есть гамильтонов путь $V_1 V_2 \dots V_m$.
- Так как турнир $C(T)$ ацикличен, $V_i V_j \in A(C(T))$ при $i < j$. □

Теорема 4

(Р. Camion, 1959.) В сильно связном турнире существует гамильтонов цикл.

Доказательство. • В сильно связном турнире T есть циклы. Рассмотрим максимальный простой цикл $C = a_1 a_2 \dots a_k$. Предположим, что он не гамильтонов, пусть вершина b не вошла в этот цикл.

• Пусть не все стрелки между b и циклом C ориентированы одинаково. Тогда существуют последовательные вершины цикла a_i и a_{i+1} такие, что $a_i b, b a_{i+1} \in A(T)$ (см. рис. а). В этом случае можно удлинить максимальный цикл C , вставив вершину b между a_i и a_{i+1} , противоречие.



• Пусть из всех вершин цикла C стрелки входят в b (если стрелки выходят из b к C — аналогично). Ввиду сильной связности турнира T существует путь S от b до цикла C .

• Пусть S впервые пересекает цикл C в вершине a_{i+1} (см. рис. б). Тогда можно удлинить C , заменив стрелку $a_i a_{i+1}$ на путь $a_i b S a_{i+1}$. Противоречие.

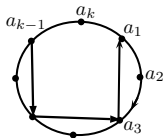
Теорема 5

В сильно связном турнире G с четырьмя и более вершинами существуют две такие вершины $a, b \in V(G)$, что турниры $G - a$ и $G - b$ сильно связны.

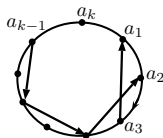
Доказательство. • По Теореме 4 в турнире G есть ГЦ $a_1 a_2 \dots a_k$ (нумерация вершин — циклическая).

• Если $a_i a_{i+2} \in A(G)$, то турнир $G - a_{i+1}$ сильно связан. Если таких i хотя бы два, то теорема доказана.

• Пусть в $A(G)$ существует не более чем одна стрелка вида $a_i a_{i+2}$. Тогда можно предположить, что $a_{i+2} a_i \in A(G)$ при $i \neq k$, а ориентация ребра $a_k a_{k+2} = a_k a_2$ может быть произвольной.



а



б

• Докажем, что в таком случае орграф $G - a_k$ сильно связан. Для этого достаточно показать, что существует путь из a_{k-1} в a_1 . Это несложно: по стрелкам-диагоналям ГЦ существует путь $a_{k-1}a_{k-3}\dots$, приходящий, в зависимости от четности $k-1$, в a_1 (рис. а) или в a_2 (рис. б). Во втором случае дополним этот путь участком $a_2a_3a_1$.

• Таким образом, турнир $G - a_k$ сильно связан. Отметим, что мы не пользовались при этом рёбрами $a_k a_2$ и $a_k a_{k-2}$, их ориентация не имеет для нас значения. Поэтому аналогично доказывается, что турнир $G - a_2$ сильно связан.



Теорема 6

(J. W. Moon, 1966.) Пусть G — сильно связный турнир, а $k \in \mathbb{N}$, $3 \leq k \leq v(G)$. Тогда выполнены следующие утверждения.

- 1) Для любой вершины $v \in V(G)$ существует простой цикл длины k , проходящий через v .
- 2) В турнире G существует хотя бы $v(G) + 1 - k$ простых циклов длины k .

Доказательство. • Зафиксируем k и будем доказывать оба утверждения индукцией по количеству вершин турнира G . При $v(G) = k$ оба утверждения следуют из Теоремы 4: в сильно связном турнире G есть гамильтонов цикл.

1) • Пусть $v(G) > k$. Тогда по Теореме 5 существует такая вершина $w \neq v$, что турнир $G - w$ сильно связан.

• Так как $3 \leq k \leq v(G) - 1 = v(G - w)$, по индукционному предположению в турнире $G - w$ есть простой цикл длины k , проходящий через v . Этот же цикл есть и в турнире G .

2) • Пусть $v(G) > k$. Тогда по Теореме 5 существует такая вершина w , что турнир $G - w$ сильно связан.

• В турнире $G - w$ существует не менее $v(G - w) + 1 - k = v(G) - k$ простых циклов длины k .

• По пункту 1 в турнире G существует простой цикл длины k , проходящий через вершину w , следовательно, в турнире G не менее чем $v(G) - k + 1$ простых циклов длины k . □

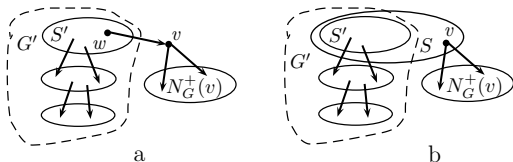
- Пусть G — оргграф. Как и в неориентированном случае, $\alpha(G)$ — количество вершин в максимальном *независимом* множестве вершин оргграфа G (то есть, максимальном множестве вершин, никакие две из которых не соединены стрелкой).

Теорема 7

(V. Chvatal; L. Lovasz, 1974.) В любом оргграфе G существует такое независимое множество $S \subset V(G)$, что для любой вершины $v \in V(G) \setminus S$ существует путь длины не более 2 с началом в S и концом v .

Доказательство. Доказательство будет индукцией по количеству вершин в оргграфе. База при $v(G) = 1$ очевидна.

- **Индукционный переход.** Пусть для меньших оргграфов утверждение доказано. Рассмотрим любую вершину $v \in V(G)$. Если $V(G) = \{v\} \cup N_G^+(v)$, то утверждение теоремы очевидно, нам подходит $S = \{v\}$.



- Пусть $V(G) \neq \{v\} \cup N_G^+(v)$. Для орграфа $G' = G - (\{v\} \cup N_G^+(v))$ утверждение доказано, возьмем соответствующее этому графу независимое множество S' .
- Если существует такая вершина $w \in S'$, что $v \in N_G^+(w)$, то множество S' подходит и для графа G (см. рис. а).
- Если такой вершины w нет, положим $S = S' \cup \{v\}$. Так как $S' \cap N_G^+(v) = \emptyset$, в этом случае множество S независимо, и любая вершина $x \in V(G) \setminus S$ достижима из S по пути длины не более 2 (см. рис. б). □

Следствие 3

В любом турнире G существует такая вершина v , что для любой вершины $w \in V(G)$ существует vw -путь длины не более 2.

Теорема 8

(B. Roy, 1967; T. Gallai, 1968) Пусть G — неориентированный граф, $\vec{G}$ — его ориентация. Тогда орграф $\vec{G}$ содержит путь длины не менее $\chi(G) - 1$.

Доказательство. • Пусть $A \subset A(\vec{G})$ — минимальное по включению такое множество стрелок, что орграф $G' = \vec{G} - A$ — ациклический.

• Для любой вершины $v \in V(G)$ положим $\rho(v)$ равным длине наибольшего простого пути в орграфе G' с началом в v . Покажем, что ρ — правильная раскраска вершин графа G .

Утверждение

Пусть вершины $a, b \in V(G)$ соединены простым путём P в орграфе G' . Тогда $\rho(a) > \rho(b)$.

Доказательство. Рассмотрим путь P_b длины $\rho(b)$ в орграфе G' . Так как G' — ациклический, то любой путь в орграфе G' — простой. В частности, равный объединению P и P_b путь P_a с началом в a — простой. Так как $|P_a| > |P_b|$, то $\rho(a) > \rho(b)$. $\square$

- Вернемся к доказательству теоремы 8.
- Пусть $x, y \in V(G)$ и $xy \in E(G)$. НУО $xy \in A(\vec{G})$.
Если $xy \in A(G')$, то, как доказано выше, $\rho(x) \neq \rho(y)$.
- Если $xy \notin A(G')$, то $xy \in A$. Из минимальности A следует, что в орграфе $G' + xy$ есть цикл, но тогда в орграфе G' есть yx -путь, а следовательно, $\rho(x) \neq \rho(y)$.
- Мы доказали правильность раскраски ρ . Пусть k — номер наибольшего цвета в ρ . Тогда в орграфе G' (а значит, и в $\vec{G}$) есть простой путь длины k . Поскольку раскраска ρ красит вершины в цвета $0, 1, \dots, k$, то $\chi(G) \leq k + 1$. □

Ядро орграфа и списочные раскраски рёбер

Определение

Пусть H — орграф. Независимое множество вершин $U \subset V(H)$ называется **ядром**, если для любой вершины $v \in V(H) \setminus U$ существует хотя бы одна стрелка $vu \in A(H)$, где $u \in U$.

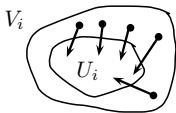
Лемма 7

Пусть H — орграф, каждой вершине $v \in V(H)$ соответствует список цветов $L(v)$, причём $d_H^+(v) < \ell(v)$. Предположим, что каждый индуцированный подграф орграфа H имеет ядро. Тогда существует правильная раскраска вершин H в соответствии с данными списками.

Доказательство. • Индукция по $v(H)$, база для пустого орграфа очевидна.

• Предположим, что для меньших орграфов лемма доказана. Пусть i — цвет, присутствующий в списках, $V_i \subset V(H)$ — множество из всех вершин, чьи списки содержат цвет i , $H_i = H(V_i)$.

- По условию, оргграф H_i имеет ядро U_i . Покрасим все вершины из U_i в цвет i (это не нарушит правильности раскраски, так как ядро является независимым множеством), после чего исключим цвет i из списков всех вершин $v \in V_i \setminus U_i$ и получим новые списки $L'(v)$.



- Пусть $H' = H - U_i$. Поскольку U_i — ядро орграфа $H_i = H(V_i)$, то для любой вершины $v \in V_i \setminus U_i$ выполняется $d_{H'}^+(v) \leq d_H^+(v) - 1 < \ell(v) - 1 = \ell'(v)$.
- По индукционному предположению, вершины орграфа H' можно покрасить правильным образом по новым спискам, в которых нет цвета i . В результате получится правильная раскраска всех вершин орграфа H по спискам.



Теорема 9

(F. Galvin, 1995.) Для любого двудольного графа G выполняется $\text{ch}'(G) = \chi'(G) = \Delta(G)$.

Доказательство. • Пусть $G = (V_1, V_2, E)$, $k = \Delta(G)$. По теореме 4.9 мы имеем $\chi'(G) = k$, то есть, существует правильная раскраска ρ рёбер графа G в k цветов (пусть это цвета $1, \dots, k$).

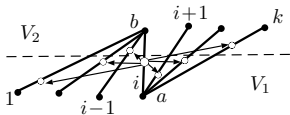
• Обозначим через G' *рёберный граф* двудольного графа G . (Вершины G' соответствуют рёбрам G . Две вершины G' смежны, если и только если смежны соответствующие рёбра.)

• Пусть каждому ребру e графа G (а значит, и каждой вершине графа G') соответствует список $L(e)$ из k цветов. Наша цель — построить правильную раскраску вершин графа G' по данным спискам. Для этого мы хотим применить к рёберному графу G' Лемму 7.

• Введём *множество предпочтений* для вершин исходного графа G . Для вершины $a \in V_1$ предпочтение $<_a$ строго упорядочивает инцидентные a рёбра по возрастанию их цветов в раскраске ρ , а для вершины $b \in V_2$, предпочтение $<_b$ строго упорядочивает инцидентные b рёбра по убыванию их цветов в раскраске ρ .

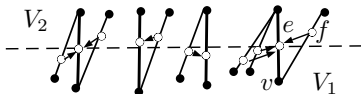
- Мы ориентируем каждое ребро ef рёберного графа G' от e к f , если для их общей вершины v рёбер e и f имеет место $e <_v f$. Тем самым, мы получим ориентацию $\vec{G}'$ графа G' .

- По построению множества предпочтений мы имеем $d_{\vec{G}'}^+(e) \leq k - 1 < \ell(e)$. (Если $e = ab$, $a \in V_1$, $b \in V_2$ и $\rho(e) = i$, то из e могут выходить стрелки к инцидентным a рёбрам цветов $i + 1, \dots, k$ и к инцидентным b рёбрам цветов $1, \dots, i - 1$, всего не более $k - 1$ стрелки, см. рис.)



- Остаётся доказать, что у любого индуцированного подграфа $\vec{H}'$ орграфа $\vec{G}'$ есть ядро. Для этого мы воспользуемся теоремой Гэйла-Шепли (Stable Marriage Theorem).

- Пусть F — множество всех рёбер графа G , соответствующих вершинам из $\vec{H}'$, а $H = G(F)$. Для введённого выше множества предпочтений существует стабильное паросочетание M графа H . Рёбра из M образуют независимое множество вершин орграфа $\vec{H}'$.



- По определению стабильного паросочетания и по построению ориентации $\vec{H}'$, для любого ребра $f \in F \setminus M$ существует такое ребро $e \in M$ и общая вершина v рёбер e и f , что $f <_v e$, то есть, $fe \in A(\vec{H}')$. Таким образом, M — ядро $\vec{H}'$.
- Теперь воспользуемся Леммой 7 и получим, что существует правильная раскраска вершин графа G' (и, соответственно, рёбер графа G) по заданным спискам. Таким образом, $\text{ch}'(G) = k$.



Покрывание вершин путями

Теорема 10

(Т. Gallai; А. Milgram, 1960.) Вершины орграфа G можно покрыть не более, чем $\alpha(G)$ попарно непересекающимися простыми путями.

Доказательство. • Для каждого простого пути P обозначим его конец через $t(P)$.

- Будем называть **покрытием** орграфа G множество из нескольких попарно непересекающихся простых путей в G , покрывающих все его вершины. Для каждого покрытия $\mathcal{P}$ обозначим через $T(\mathcal{P})$ множество концов всех путей из $\mathcal{P}$.
- На множестве покрытий орграфа G мы введём отношение порядка: будем считать, что $\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2$, если $|\mathcal{P}_1| < |\mathcal{P}_2|$ и $T(\mathcal{P}_1) \subset T(\mathcal{P}_2)$.

Утверждение

Пусть $\mathcal{P}$ — минимальное по введённому отношению порядка покрытие орграфа G . Тогда на каждом пути из $\mathcal{P}$ можно выбрать по вершине так, чтобы множество выбранных вершин было независимым.

Доказательство. • Будем считать, что для меньших орграфов утверждение доказано.

- Пусть $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$, $u_i = t(P_i)$. Если множество $\{u_1, \dots, u_n\}$ — независимое, то утверждение доказано.
- Предположим, что $u_i u_j \in A(G)$. Пусть путь Q_i получен из P_i добавлением стрелки $u_i u_j$.
- Если $V(P_j) = \{u_j\}$, то заменой P_i и P_j на Q_i получаем строго меньшее в нашем порядке чем $\mathcal{P}$, покрытие, что невозможно.
- Значит, $V(P_j) \neq \{u_j\}$. Тогда рассмотрим орграф $G' = G - u_j$ и его покрытие $\mathcal{P}'$, полученное заменой пути P_j на $P'_j = P_j - u_j$.
- Докажем, что $\mathcal{P}'$ — минимальное покрытие орграфа G' .
- Если это не так, рассмотрим строго меньшее в нашем порядке покрытие $\mathcal{Q}'$ орграфа G' .
- Пусть $u'_j = t(P'_j)$, ясно, что $u'_j u_j \in A(G)$. Отметим, что единственная вершина, которая может входить в $T(\mathcal{Q}')$ и не входит в $T(\mathcal{P})$ — это u'_j . Рассмотрим три случая.

Случай 1: Существует путь $Q' \in \mathcal{Q}'$ с $t(Q') = u'_j$.

- Пусть $Q = Q' u'_j u_j$, тогда $t(Q) = u_j$.
- Рассмотрим покрытие $\mathcal{Q}$ орграфа G , полученное из $\mathcal{Q}'$ заменой пути Q' на Q . Очевидно $\mathcal{Q} < \mathcal{P}$: мы имеем $T(\mathcal{Q}) \subset T(\mathcal{P})$ и $|\mathcal{Q}| = |\mathcal{Q}'| < |\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|$. Противоречие с выбором $\mathcal{P}$.

Случай 2: В $\mathcal{Q}'$ нет пути с концом в u'_j , но существует путь $Q' \in \mathcal{Q}'$ с $t(Q') = u_i$.

- Пусть путь Q получен из Q' добавлением ребра $u_i u_j$, тогда $t(Q) = u_j$.
- Рассмотрим покрытие $\mathcal{Q}$ орграфа G , полученное из $\mathcal{Q}'$ заменой пути Q' на Q . Очевидно $\mathcal{Q} < \mathcal{P}$: мы имеем $T(\mathcal{Q}) \subset T(\mathcal{P})$ и $|\mathcal{Q}| = |\mathcal{Q}'| < |\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|$. Противоречие с выбором $\mathcal{P}$.

Случай 3: В покрытии $\mathcal{Q}'$ нет ни пути с концом в u'_j , ни пути с концом в u_i .

- Тогда $|T(\mathcal{Q}')| \leq |T(\mathcal{P})| - 2$, следовательно, $|\mathcal{Q}'| \leq |\mathcal{P}| - 2$.
- Дополним $\mathcal{Q}'$ до покрытия $\mathcal{Q}$ орграфа G , добавив путь $\{u_j\}$. И на этот раз оказывается, что $\mathcal{Q} < \mathcal{P}$, противоречие.

- Таким образом, $\mathcal{P}'$ — минимальное покрытие орграфа G' .
- Так как $v(G') < v(G)$, по индукционному предположению на путях покрытия $\mathcal{P}'$ можно выбрать по вершине так, чтобы множество выбранных вершин было независимым. По построению покрытия $\mathcal{P}'$, выбранные вершины подходят и для покрытия $\mathcal{P}$ орграфа G . □
- Теперь легко доказать теорему. Рассмотрим любое минимальное покрытие $\mathcal{P}$ орграфа G . На путях покрытия $\mathcal{P}$ можно выбрать по вершине так, чтобы эти вершины образовывали независимое множество, следовательно, $|\mathcal{P}| \leq \alpha(G)$. □
- В качестве следствия из Теоремы 9 мы выведем классическую теорему Дилворса.

Определение

Пусть V — частично упорядоченное множество с порядком $<$. Подмножество $U \subset V$ — **цель**, если любые два его элемента сравнимы и **антицель**, если никакие два его элемента несравнимы.

Следствие 4

(R. P. Dilworth, 1950.) Пусть V — конечное частично упорядоченное множество. Тогда минимальное количество цепей, покрывающих V , равно количеству вершин в максимальной антицепи множества V .

Доказательство. • Построим орграф G на элементах множества V , как на вершинах: для любых $x, y \in V$ мы положим $xy \in A(G)$, если и только если $x < y$.

- Очевидно, $\alpha(G)$ равно количеству вершин в максимальной антицепи множества V , а путь в орграфе G проходит по вершинам цепи множества V .
- По Теореме 10 вершины орграфа G можно покрыть не более, чем $\alpha(G)$ путями, то есть, множество V можно покрыть не более, чем $\alpha(G)$ цепями.
- Остаётся лишь добавить, что две вершины антицепи не могут оказаться в одной цепи, поэтому покрывающих множество V цепей будет ровно $\alpha(G)$. □