

### Раскраски

20. Совершенные графы. Элементарные примеры, гипотезы Бержа, теорема Ловаса (формулировка).
21. Теорема Ловаса о совершенных графах.

### Планарные графы

1. Изображение графа на плоскости, грань.
2. Теорема Жордана для замкнутой ломаной.
3. Изображение графа на плоскости и сфере, их соответствие. Внешняя грань.
4. Граница грани. Свойства.
5. Циклический обход границы грани.
6. Несвязная граница грани у несвязного графа.
7. Внутренние рёбра граней — мосты. Границы граней графа без мостов — циклы.
8. Если есть две грани с одинаковой границей, то граф — простой цикл.
9. Границы граней двусвязного графа.
10. Границы граней трёхсвязного графа.
11. Изоморфизм графов и плоских изображений. Единственность изображения трёхсвязного планарного графа на плоскости.
12. Формула Эйлера.
13. Оценки на число рёбер плоского графа и существование вершины степени не более 5.
14. Непланарность  $K_5$  и  $K_{3,3}$  и их подразбиений.
15. Подразбиения  $K_5$  и  $K_{3,3}$  и стягивание рёбра.
16. Теорема Куратовского: трёхсвязность минимального контрпримера.
17. Теорема Куратовского: доказательство без трёхсвязности минимального контрпримера.
18. Триангуляция графа.
19. Существование в триангуляции ребра, входящего ровно в два треугольника.
20. Теорема Вагнера о выпрямлении изображения планарного графа.
21. Лемма о соединении точки на грани с “серединой” рёбер.
22. Двойственный граф. Соответствие объектов плоского графа и его двойственного (вершины, рёбра, грани, петли, мосты итд).
23.  $(G^*)^* \simeq G$ .
24. Раскраска граней плоского графа. Теорема о 5 красках.
25. Тэйтова раскраска триангуляции, связь с реберной раскраской кубического плоского графа без мостов.
26. Эквивалентность Тэйта (без Тэйтовых раскрасок).
27. Теорема о раскраске граней плоского графа в два цвета.
28. Теорема Головиной-Яглома о раскраске вершин триангуляции в 3 цвета.

### Орграфы

1. Компоненты сильной связности ориентированного графа, граф компонент сильной связности. Их свойства.
2. Критерии сильной связности и ацикличности орграфа.
3. Входящее и исходящее дерево вершины.
4. Минимальные сильно связные графы. Оценки на число стрелок.
5. Критерий существования гамильтонова цикла в орграфе.
6. Существование гамильтонова пути в турнире.
7. Существование гамильтонова цикла в сильно связном турнирном графе.
8. Удаление вершин из сильно связного турнирного графа с сохранением сильной связности.
9. Циклы в сильно связных турнирах. Теорема Муна.
10. Теорема Хватала-Ловаса о независимом множестве в ориентированном графе.
11. Теорема Роя-Галлаи о раскрасках и ориентациях.
12. Ядро орграфа. Критерий раскрашиваемости графа в терминах ядер ориентаций.
13. Теорема Гэльвина о списочных рёберных раскрасках двудольного графа.
14. Теорема Галлаи-Мильграма о покрытии орграфа путями.
15. Теорема Дилворса.

### Сети и потоки

1. Сети и потоки. Разрез сети. Лемма о потоке через разрез.
2. Остаточная сеть и дополняющий путь. Лемма о сумме потоков. Поток вдоль пути.
3. Теорема Форда-Фалкерсона и следствие о минимальном разрезе.

4. Целые сети. Целый максимальный поток в целой сети.
5. Реберная теорема Менгера как следствие теоремы Форда-Фалкерсона.
6. Максимальный поток в произвольной сети. Алгоритм кратчайшего пути.

### Теория Рамсея и экстремальные задачи

1. Двумерные числа Рамсея: оценки сверху для случая двух цветов.
2. Оценка снизу на  $r(k, k)$ .
3. Двумерные числа Рамсея: оценка сверху для случая более чем двух цветов.
4. Многомерные числа Рамсея: доказательство конечности.
5. Применение теории Рамсея: задача о выпуклом  $n$ -угольнике.
6. Применение теории Рамсея: теорема Шура об одноцветном решении уравнения  $x + y = z$ .
7. Лемма о произвольном дереве-подграфе.
8. Числа Рамсея для произвольных графов. Теорема Хватала
9. Оценка количества рёбер в графе, удовлетворяющем наследственному свойству.
10. Графы без  $K_n$ : теорема Турана.

### Остовные деревья

1. Формула Кэли.
2. Остовные деревья полного графа. Код Прюфера.
3. Количество листьев в остовном дереве: теорема о промежуточных значениях.
4. Алгоритм выделения остовного дерева с большим числом листьев в связном графе, степени вершин которого не менее 3.
5. Матричная теорема о деревьях.
6. Количество остовных деревьев равно алгебраическому дополнению любого элемента лапласиана.