

Серия 1. Пути и деревья

1. В графе G 101 вершина, а $\delta(G) \geq 50$. Докажите, что G связан.
2. В связном графе нашлись два простых пути максимальной длины. Докажите, что у них есть хотя бы одна общая вершина.
3. Пусть T — дерево с хотя бы 3 вершинами. Докажите, что T имеет хотя бы одну из двух следующих конфигураций:
 - (*) два листа, смежных с одной и той же вершиной;
 - (**) лист, смежный с вершиной степени 2.
4. В выпуклом n -угольнике провели несколько диагоналей, не имеющих общих внутренних точек, которые разбили его на треугольники (это называется *триангулировать многоугольник*).
 - а) Докажите, что получилось ровно $n - 2$ треугольника.
 - б) Пусть каждый треугольник — вершина графа, а две вершины смежны, если треугольники имеют общую сторону. Докажите, что получилось дерево.
5. В вершинах графа расставлены числа ± 1 таким образом, что для каждой вершины произведение чисел в вершинах, соседних с ней, отрицательно. Чему может быть равно произведение чисел во всех вершинах?
6. Вершины дерева T покрашены в красный и синий цвет так, что любые две смежные вершины разноцветны, и красных не меньше, чем синих. Докажите, что у T есть красный лист.
7. Может ли сумма попарных расстояний между вершинами 25-вершинного дерева быть равна 1225?