

Серия 10. Орграфы

1. а) Докажите, что в любом графе без кратных рёбер есть две вершины одинаковой степени. (Петли и кратные рёбра запрещены.)

б) А верно ли, что в любом орграфе (без петель и кратных стрелок) есть две вершины одинаковой исходящей степени?

2. Дан неполный ориентированный граф G без кратных стрелок. При добавлении любой стрелки (без появления кратных и встречных стрелок) он становится сильно связным. Докажите, что граф G является сильно связным.

3. Дан связный граф. Докажите, что в нем можно выделить остовное дерево и ориентировать его ребра так, чтобы для любых двух вершин, соединенных ребром в исходном графе, из одной из них в другую можно было бы пройти по стрелкам.

4. В связном графе четное число ребер. Докажите, что ребра можно ориентировать так, чтобы из каждой вершины выходило четное число ребер.

5. В орграфе 200 вершин, из каждой вершины выходит хотя бы одна стрелка и в каждую вершину входит хотя бы одна стрелка. Докажите, что можно добавить не более 100 новых стрелок так, чтобы этот орграф стал сильно связным. (Между двумя вершинами может быть проведено несколько стрелок.)

6. Орграф D таков, что неориентированный граф $\underline{D}$ связан. В каждой вершине D входящих и исходящих стрелок поровну. Докажите, что D эйлеров (то есть, имеет эйлеров цикл — ориентированный цикл, проходящий по каждой стрелке ровно один раз).

7. Пусть G — турнир на 2020 вершинах. Докажите, что в нем существует такой гамильтонов путь $a_1 a_2 \dots a_{2020}$, что его концы соединены стрелкой $a_1 a_{2020}$.