Серия 4. Связность

1. Любое ли дерево является деревом блоков и точек сочленения некоторого графа?

2. Пусть G — связный граф, $U \subsetneq V(G)$. Докажите, что в G есть не менее $|U|$ рёбер, инцидентных вершинам из U.

3. Докажите, что если граф G — эйлеров, то каждый его блок также эйлеров.

4. В группе людей некоторые знакомы. Если выбрать нескольких из них так, что каждый из оставшихся знаком хотя бы с одним из выбранных, то окажется, что выбрано не менее 10 человек. Докажите, что из этой группы можно выбрать 10 попарно незнакомых людей.

5. Докажите, что в графе минимальной степени $2d-1$ можно выбрать паросочетание, в котором хотя бы d рёбер.

6. Пусть G — граф на $n \geq 3$ вершинах, $G_1, \ldots, G_n$ — все графы, полученные из G удалением одной вершины. Графы $G_1, \ldots, G_n$ изображены на n листочках, вершины графов не помечены (возможно, на некоторых картинках графы совпадают). Докажите, что по графам $G_1, \ldots, G_n$ можно установить:

а) степени вершин графа G;

б) связен ли граф G;

в) максимальные компоненты графа G в случае, когда он несвязен;

г) граф G в случае, когда известно, что он несвязен.

7. Выведите теорему Кёнига ($\alpha'(G) = \beta(G)$) из теоремы Холла.