

Серия 6. Хроматический многочлен

1. На новогодний праздник пришли 99 детей. В гардеробе каждый из них обругал кого-то из остальных, причём никто не был обруган дважды. Когда Дед Мороз предложил всем загадать по два желания, первым желанием каждого ребенка было получить мороженое, а вторым — чтобы его обидчик не получил мороженое. Докажите, что у кого-то из детей сбудется ровно одно из загаданных желаний.

2. В стране 100 городов. Каждые два города соединены прямым рейсом одной из двух авиакомпаний: синей или зеленой. Для любых четырех городов оказалось, что среди всех рейсов между ними ровно три рейса выполняются самолетами синей авиакомпании. Докажите, что всего рейсов синей авиакомпании столько же, сколько рейсов зеленой авиакомпании.

3. а) Пусть T — дерево, $v(T) = n$. Докажите, что $\chi_T(k) = k(k-1)^{n-1}$.

б) Пусть G — граф с $\chi_G(k) = k(k-1)^{n-1}$. Докажите, что G — дерево с n вершинами.

4. G — граф с $v(G) = n$ и $e(G) = m$, а $\chi_G(k) = k^n - a \cdot k^{n-1} + \dots$. Найдите коэффициент a (выразите через данные числа).

5. Постройте регулярный граф степени 2021, не имеющий ни одного остовного регулярного подграфа.

6. Докажите, что для любого графа G существует такой двудольный подграф G' , что:

a) $e(G') \geq \frac{e(G)}{2}$;

b) $d_{G'}(x) \geq \frac{d_G(x)}{2}$ для любой вершины $x \in V(G)$.