Серия 8. Планарность, немного стереометрии и раскраски

1. На вечеринке гость считается застенчивым, если у него не более трех знакомых. Оказалось, что у каждого гостя не менее трех застенчивых знакомых. Докажите, что все гости — застенчивые.

2. Вершины графа G покрашены так, что концы любого простого пути длины 2 покрашены в один цвет. Докажите, что вершины покрашены не более, чем в два цвета.

3. Докажите, что любой выпуклый многогранник имеет либо вершину степени 3, либо грань-треугольник. (Выпуклый многогранник — трёхсвязный граф без петель и кратных рёбер, который можно изобразить на сфере без пересечений рёбер.)

4. Многогранникназыается *правильным*, если он выпуклый, в каждой вершине сходится одно и то же число рёбер, а его грани — одинакоые правильные многоугольники.

а) Пусть у правильного многогранника в каждой вершине сходится k рёбер, а грань — это s-угольник. Докажите, что $(k-2)(s-2) < 4$.

б) Перечислите все правильные многогранники и докажите, что других нет.

5. Все грани многогранника являются треугольниками. Каждая грань окрашена в черный или белый цвет так, что количество ребер, по которым граничат одноцветные грани, минимально. Пусть a и b — количества белых и черных граней, соответственно. Докажите, что $a \leq 1{,}5b$.

6. а) Докажите, что можно удалить не более $\frac{1}{k}$ рёбер из графа так, чтобы получился граф хроматического числа не более k.

б) Докажите, что любой граф G имеет такой подграф G' с $\chi(G') \leq k$, что для любой вершины v выполнено $d_{G'}(v) \geq \frac{k-1}{k} d_G(v)$.

7. В графе 2000 вершин, все они имеют степень 7. Докажите, что в этом графе можно выбрать 700 ребер, не имеющих общих концов.