

Серия 9.

1. Придумайте пример двусвязного планарного графа со сколь угодно большим числом вершин, который имеет два неизоморфных плоских изображения.

2. Пусть $d > 100$, а граф G получен из d -регулярного графа с нечетным числом вершин в результате удаления 45 ребер. Докажите, что $\chi'(G) = d + 1$.

3. По окружности расставлено несколько точек. Из каждой точки выходит 100 отрезков в другие точки. Отрезки покрашены в 100 цветов так, что одноцветные отрезки не имеют общих точек (в том числе концов). Докажите, что точки можно покрасить в два цвета так, чтобы каждый отрезок соединял разноцветные точки.

4. Пусть G — двусвязный плоский граф. Докажите, что двойственный граф G^* — тоже двусвязный.

5. В многограннике есть ровно две вершины, из которых выходит нечетное число ребер, причём эти вершины соединены ребром. Докажите, что для каждого $n \geq 3$ у этого многогранника найдется грань, число сторон которой не делится на n .

6. Назовем p^n -деревом следующую конструкцию: из корня дерева выходят p ребер, ведущих к вершинам первого уровня; из каждой вершины первого уровня выходит еще по p ребер, ведущих к вершинам второго уровня и т.д., наконец, из каждой вершины $(n - 1)$ -го уровня ведут p ребер к вершинам n -го уровня, которые являются висячими.

Висячие вершины 4^n -дерева покрашены в 3000 цветов. Докажите, что из него можно выбрать 2^n -поддерево с тем же корнем так, чтобы висячие вершины поддерева были покрашены не более, чем в 1000 цветов.

7. В группе 20 студентов. Среди них есть студент, имеющий в группе одного друга, студент, имеющий двух друзей, ..., студент, имеющий в группе 14 друзей. Докажите, что найдутся трое студентов, любые двое из которых дружат.