

Теория графов. Глава 5. Раскраски.

Д. В. Карпов

2024

Определение

1) **Раскраской** вершин графа G в k цветов называется функция $\rho : V(G) \rightarrow M$, где $|M| = k$. Раскраска ρ называется **правильной**, если $\rho(v) \neq \rho(u)$ для любой пары смежных вершин u и v .

2) Через $\chi(G)$ обозначим **хроматическое число** графа G — наименьшее натуральное число, для которого существует правильная раскраска вершин графа G в такое количество цветов.

• Как правило, при разговоре о раскрасках в k цветов мы будем использовать для обозначения цветов числа от 1 до k . В случаях, когда мы используем другие обозначения для цветов, об этом будет сказано.

Лемма 1

Для любого графа G выполняется $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq v(G)$.

Доказательство.

Все вершины одного цвета в правильной раскраске попарно несмежны, то есть образуют независимое множество.

Лемма 2

Пусть G — связный граф, $\Delta(G) \leq d$, причем хотя бы одна из вершин графа G имеет степень менее d . Тогда $\chi(G) \leq d$.

Доказательство.

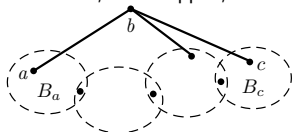
- Индукция по количеству вершин. База для графа, у которого не более d вершин, очевидна.
- Будем считать, что утверждение верно для любого меньшего связного графа с меньшим чем $v(G)$ количеством вершин.
- Пусть $u \in V(G)$ — вершина степени менее d . Рассмотрим граф $G - u$. Пусть G_1, \dots, G_k — компоненты графа $G - u$.
- В каждом из графов G_1, \dots, G_k ввиду связности графа G обязательно есть вершина u_i , смежная в графе G с u .
- Тогда $d_{G_i}(u_i) < d$ и $\Delta(G_i) \leq d$. По индукционному предположению существует правильная раскраска вершин графа G_i в d цветов.
- Таким образом, существует правильная раскраска вершин в d цветов и у графа $G - u$. Так как $d_G(u) < d$, мы можем докрасить в один из цветов вершину u , не нарушая правильности раскраски графа.



Лемма 3

Если G — двусвязный неполный граф с $\delta(G) \geq 3$. Тогда существуют такие вершины $a, b, c \in V(G)$, что $ab, bc \in E(G)$, $ac \notin E(G)$ и граф $G - a - c$ связан.

Доказательство. • Пусть G трёхсвязен. Так как G неполный, существуют такие вершины $a, b, c \in V(G)$, что $ab, bc \in E(G)$ и $ac \notin E(G)$. Граф $G - a - c$, очевидно, связан.



- Пусть G не трёхсвязен. Тогда существует такая вершина $b \in V(G)$, что граф $G' = G - b$ не двусвязен.
- Граф G' имеет хотя бы два крайних блока. Так как граф G двусвязен, вершина b должна быть смежна хотя бы с одной внутренней вершиной каждого крайнего блока графа G' . Пусть a и c — смежные с b внутренние вершины двух разных крайних блоков B_a и B_c графа G' соответственно.
- Тогда графы $B_a - a$ и $B_c - c$ связны, откуда легко следует связность графа $G' - a - c$. Так как $d_G(b) \geq 3$, вершина b смежна с $G' - a - c$, а значит, и граф $G - a - c$ связан.

Теорема 1

(R. L. Brooks, 1941.) Пусть $d \geq 3$, а G — связный граф, отличный от K_{d+1} , $\Delta(G) \leq d$. Тогда $\chi(G) \leq d$.

- При $\Delta(G) = 2$ вопрос о существовании правильной раскраски вершин связного графа G в два цвета очевиден. Такой граф G — либо P_n (путь из n вершин), либо C_n (цикл из n вершин). В первом случае легко видеть, что $\chi(P_n) = 2$, а во втором случае $\chi(C_{2k}) = 2$ и $\chi(C_{2k+1}) = 3$.

Доказательство теоремы 1. • Достаточно рассмотреть случай регулярного графа степени d (иначе воспользуемся леммой 2). Рассмотрим два случая.

Случай 1: в графе G есть точка сочленения a .

- Тогда $G = G_1 \cup G_2$, где $V(G_1) \cap V(G_2) = \{a\}$, а графы G_1 и G_2 связные.
- Так как a смежна хотя бы с одной вершиной и в G_1 , и в G_2 , то $d_{G_1}(a) < d$ и $d_{G_2}(a) < d$. Следовательно, по Лемме 2 для каждого $i \in \{1, 2\}$ граф G_i имеет правильную раскраску вершин ρ_i в d цветов.
- Так как цвета в этих раскрасках нумеруются независимо, можно считать, что $\rho_1(a) = \rho_2(a) = 1$.
- Теперь мы можем склеить раскраски ρ_1 и ρ_2 по точке сочленения a и получить правильную раскраску графа G .

Случай 2: G двусвязен.

- По лемме 3 существуют такие $a, b, c \in V(G)$, что $ab, bc \in E(G)$, $ac \notin E(G)$ и граф $G - a - c$ связан.
- Рассмотрим связный граф $G' = G - \{a, c\}$ и остовное дерево T этого графа.

- Сделаем вершину b корнем T и распределим вершины T по уровням (номером уровня будет расстояние до корня b).
- Положим $\rho(a) = \rho(c) = 1$ и будем красить остальные вершины графа G (они же вершины дерева T) в порядке убывания номеров их уровней, начиная с листьев T .
- Пусть $x \neq b$ — очередная вершина, причем на момент ее рассмотрения мы покрасили все вершины больших уровней и не красили вершин меньших уровней.
- Тогда предок вершины x в дереве T еще не покрашен, а значит, покрашено не более, чем $d - 1$ соседей вершины x . Мы можем выбрать цвет $\rho(x)$ отличным от всех уже покрашенных соседей вершины x .
- В итоге все отличные от корня b вершины мы покрасим. Рассмотрим b — все ее соседи уже покрашены, причём $\rho(a) = \rho(c)$. Следовательно, существует цвет, в который не покрашен ни один из соседей вершины b . Именно в этот цвет мы покрасим вершину b и получим правильную раскраску вершин графа G в d цветов.

Графы с большим хроматическим числом без треугольников.

Определение

Кликовое число графа G (обозначение: $\omega(G)$) — это количество вершин в наибольшей **клике** (то есть полном подграфе) этого графа.

- Очевидно, $\chi(G) \geq \omega(G)$. Самый простой способ построить граф с большим хроматическим числом — поместить в граф клику большого размера. Однако, граф с большим хроматическим числом может не иметь большой клики.

Теорема 2

(J. Mycielski, 1955.) Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такой граф G без треугольников, что $\chi(G) = k$.

Доказательство. • Для $k = 1$ и $k = 2$ подойдут полные графы K_1 и K_2 . Стартуя от графа $G_2 = K_2$, мы построим серию примеров графов G_3, G_4, \dots без треугольников с $\chi(G_k) = k$.

- Переход:** пусть построен граф G_k , причём $V(G_k) = \{u_1, \dots, u_n\}$.

• Этот граф будет частью графа G_{k+1} , в котором будут добавлены множество новых вершин $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ и новая вершина w .

• Рёбра между новыми вершинами проведёмы так: v_i будет смежна со всеми вершинами из $N_{G_k}(u_i)$ и только с ними, а w — со всеми вершинами v_1, \dots, v_n и только с ними (см. рис.).

Утверждение 1

В графе G_{k+1} нет треугольников.

Доказательство. • Предположим противное.

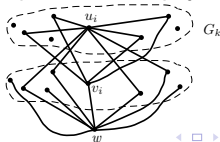
• Так как V — независимое множество в G_{k+1} , треугольник содержит не более одной вершины из V .

• Так как $N_{G_{k+1}}(w) = V$, треугольник не содержит w .

• Так как в G_k по индукционному предположению нет треугольников, наш треугольник имеет вид $v_i u_s u_t$.

• Тогда $i \notin \{s, t\}$ и по построению $u_s, u_t \in N_{G_{k+1}}(u_i)$.

• Следовательно, в графе G_k есть треугольник $u_i u_s u_t$, противоречие.



Утверждение 2

$$\chi(G_{k+1}) = k + 1.$$

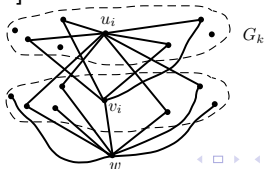
Доказательство. • Очевидно, $\chi(G_{k+1}) \leq k + 1$: если ρ — правильная раскраска вершин G_k в k цветов, то можно продолжить её на G_{k+1} , используя только один дополнительный цвет: положим $\rho(v_i) = \rho(u_i)$, $\rho(w) = k + 1$.

• Предположим, что $\chi(G_{k+1}) \leq k$, и рассмотрим правильную раскраску ρ вершин графа G_{k+1} в k цветов. НУО $\rho(w) = k$.

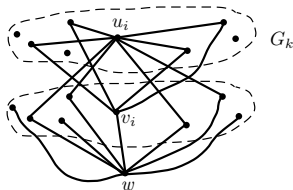
• Построим правильную раскраску ρ' вершин графа G_k в $k - 1$ цвет и, тем самым, придём к противоречию.

• Для каждой вершины u_i положим $\rho'(u_i) = \rho(u_i)$, если $\rho(u_i) \neq k$, и $\rho'(u_i) = \rho(v_i)$, если $\rho(u_i) = k$.

• Так как вершины v_1, \dots, v_n смежны с вершиной w цвета k , то их цвета отличны от k , следовательно,
 $\rho' : V(G_k) \rightarrow [1..k - 1]$.



- Докажем правильность раскраски ρ' . Предположим противное, пусть $\rho'(u_i) = \rho'(u_j)$, вершины u_i и u_j смежны. Очевидно, хотя бы одна из них перекрашена, пусть это u_i , тогда $\rho'(u_i) = \rho(v_i)$.
- Мы перекрашивали только вершины, имеющие цвет k в раскраске ρ , среди них не было смежных, следовательно, $\rho'(u_j) = \rho(u_j)$.
- По построению, из $u_j \in N_{G_k}(u_i)$ следует $u_j \in N_{G_k}(v_i)$ и мы можем сделать вывод $\rho'(u_i) = \rho(v_i) \neq \rho(u_j) = \rho'(u_j)$, противоречие с предположением.
- Таким образом, ρ' — правильная раскраска вершин графа G_k , противоречие. Следовательно, $\chi(G_{k+1}) = k + 1$. □
- Утверждения 1 и 2 полностью отказывают индукционный переход в Теореме 2. □



Определение

Для любого натурального числа k обозначим через $\chi_G(k)$ количество правильных раскрасок вершин графа G в k цветов. Функция $\chi_G(k)$ называется **хроматическим многочленом** графа G .

- Таким образом, $\chi_G(\chi(G)) \neq 0$, и $\chi_G(k) = 0$ для любого натурального числа $k < \chi(G)$.

Лемма 4

Пусть G — непустой граф, а $e = uv$ — его ребро. Тогда $\chi_{G-uv}(k) = \chi_G(k) + \chi_{G \cdot uv}(k)$.

Доказательство. • Разобьем правильные раскраски графа $G - e$ в k цветов на два типа: те, в которых вершины u и v одного цвета (тип 1) и те, в которых вершины u и v разных цветов (тип 2).

- Количество раскрасок первого типа равно $\chi_{G \cdot e}(k)$, а количество раскрасок второго типа равно $\chi_G(k)$.



Теорема 4

Для графа G с $v(G) = n$ $\chi_G(k)$ — многочлен с целыми коэффициентами степени n , старший коэффициент равен 1.

Доказательство. • Мы будем доказывать оба утверждения индукцией по количеству вершин и ребер графа G . А именно, доказывая утверждение для графа G , мы будем считать его справедливым для всех меньших графов.

База для пустого графа \bar{K}_n : понятно, что $\chi_{\bar{K}_n}(k) = k^n$, а значит, все утверждения теоремы выполнены.

Переход. Пусть G — непустой граф, а e — его ребро. По лемме 4 $\chi_G(k) = \chi_{G-e}(k) - \chi_{G \cdot e}(k)$.

- Для меньших графов $G \cdot e$ и $G - e$ уже доказаны все утверждения теоремы: $\chi_{G-e}(k)$ — многочлен степени $v(G)$, а $\chi_{G \cdot e}(k)$ — многочлен степени $v(G \cdot e) = v(G) - 1$.
- Старший коэффициент $\chi_G(k)$ равен старшему коэффициенту $\chi_{G-e}(k)$, то есть, 1.



Теорема 5

Пусть G_1, \dots, G_n — все компоненты графа G . Тогда

$$\chi_G(k) = \prod_{i=1}^n \chi_{G_i}(k).$$

Доказательство.

- При правильной раскраске вершин графа вершины разных компонент можно красить независимо друг от друга.
- Следовательно, произведение количеств правильных раскрасок графов G_1, \dots, G_n в k цветов есть количество правильных раскрасок вершин графа G в k цветов. \square

Теорема 6

Пусть G — связный граф с n блоками B_1, \dots, B_n . Тогда

$$\chi_G(k) = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} \cdot \prod_{i=1}^n \chi_{B_i}(k).$$

Доказательство. • Докажем утверждение индукцией по количеству блоков в графе G . **База** для двусвязного графа, который является своим единственным блоком, очевидна.

Переход. Пусть $n \geq 2$. НУО, B_n — крайний блок, содержащий ровно одну точку сочленения (скажем, a).

• В графе $G' = G - \text{Int}(B_n)$ ровно на один блок меньше: исчез блок B_n , остальные блоки не изменились.

- По индукционному предположению для графа G' :

$$\chi_{G'}(k) = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-2} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \chi_{B_i}(k).$$

- Остается доказать, что $\chi_G(k) = \frac{1}{k} \cdot \chi_{G'}(k) \cdot \chi_{B_n}(k)$.
- Рассмотрим любую правильную раскраску ρ графа G' в k цветов и попробуем докрасить вершины блока B_n с соблюдением правильности.
- Единственное ограничение, которое накладывается на раскраску блока B_n — зафиксирован цвет вершины a , что уменьшает количество раскрасок блока B_n ровно в k раз.



Теорема 7

Для любого графа G число 0 является корнем $\chi_G(k)$ кратности, равной количеству компонент связности графа G .

Доказательство. • 0 является корнем хроматического многочлена любого графа. Это очевидно из определения: правильных раскрасок в 0 цветов не бывает.

- Ввиду Теоремы 5 достаточно доказать, что для связного графа G кратность корня 0 у $\chi_G(k)$ равна 1.
- Пусть $v(G) = n$. Индукцией по размеру графа докажем для связного графа G , что коэффициент при k многочлена $\chi_G(k)$ не равен 0 и имеет такой же знак как $(-1)^{n-1}$.
- База для $n = 1$ очевидна.

Переход. • Пусть G — связный граф с $v(G) = n \geq 2$, а для меньших графов (с меньшим количеством вершин или с $v(G)$ вершинами, но меньшим количеством ребер) утверждение доказано.

• Пусть $e \in E(G)$. Тогда для графов $G - e$ и $G \cdot e$ утверждение доказано.

• Пусть a , b и c — коэффициенты при k у многочленов $\chi_G(k)$, $\chi_{G-e}(k)$ и $\chi_{G \cdot e}(k)$ соответственно.

• По Лемме 4 тогда $a = b - c$.

• Граф $G \cdot e$ связан и $v(G \cdot e) = n - 1$, поэтому, $c \neq 0$ и имеет знак $(-1)^{n-2}$.

• Если граф $G - e$ связан, то $b \neq 0$ и имеет знак $(-1)^{n-1}$.

• Если граф $G - e$ не связан, то $b = 0$ (так как 0 — корень кратности не менее 2 у $\chi_{G-e}(k)$).

• В обоих случаях, $a \neq 0$ и имеет знак $(-1)^{n-1}$. □

Теорема 8

(E. G. Whitehead, L.-C. Zhao, 1984.) Пусть G — связный граф с более чем одной вершиной. Тогда число 1 является корнем многочлена $\chi_G(k)$ кратности, равной количеству блоков графа G .

Доказательство. • В каждом блоке графа G хотя бы две вершины.

• Ввиду Теоремы 6 достаточно доказать, что у хроматического многочлена графа H , не имеющего точек сочленения, число 1 является корнем кратности ровно 1. Тогда из доказанной в Лемме 4 формулы будет следовать утверждение теоремы.

• Для $H \simeq K_2$, утверждение очевидно. Далее рассмотрим случай, когда H двусвязен.

• Двусвязный граф H невозможно правильно покрасить в 1 цвет, следовательно, 1 является корнем хроматического многочлена такого графа.

• Остается показать, что кратность этого корня равна 1. Для этого достаточно доказать, что $\chi'_H(1) \neq 0$.

• Мы покажем, что для двусвязного графа H на m вершинах $\chi'_H(1) \neq 0$ и имеет такой же знак, как $(-1)^m$. Доказательство будет индукцией по размеру графа.

• **База:** $v(H) = 3$. Тогда H — это полный граф на трёх вершинах и утверждение несложно проверить:

$$\chi_{K_3}(k) = k(k-1)(k-2) \text{ и } \chi'_{K_3}(1) = 1(1-2) = -1.$$

• **Переход:** пусть $v(H) \geq 4$ и утверждение доказано для всех меньших графов.

• Тогда по Теореме 4.7 существует такое ребро $e \in E(H)$, что граф $H \cdot e$ двусвязен.

• По Лемме 4 $\chi'_H(1) = \chi'_{H-e}(1) - \chi'_{H \cdot e}(1)$.

• Так как $v(H \cdot e) = m - 1$ и граф $H \cdot e$ двусвязен, $\chi'_{H \cdot e}(1) \neq 0$ и имеет тот же знак, что и $(-1)^{m-1}$.

• Так как $e(H - e) < e(H)$, если граф $H - e$ двусвязен, то уже доказано, что $\chi'_{H-e}(1)$ имеет тот же знак, что и $(-1)^m$.

• Если же граф $H - e$ не двусвязен, то он связан и имеет хотя бы два блока. Тогда для него верна формула из Теоремы 6.

• Так как хроматический многочлен каждого блока имеет своим корнем 1, для не двусвязного графа $H - e$ его хроматический многочлен имеет 1 корнем кратности хотя бы 2, то есть, в этом случае $\chi'_{H-e}(1) = 0$.

• В любом из случаев получается, что $\chi'_H(1) \neq 0$ и имеет тот знак, что нам нужен.

Определение

1) Раскраской рёбер графа G в k цветов называется функция $\rho : E(G) \rightarrow M$, где $|M| = k$. Обычно мы будем использовать для обозначения k цветов в раскраске числа от 1 до k : в случаях, когда $M \neq [1..k]$, об этом будет сказано.

2) Любая раскраска ρ ребер графа G в цвета $[1..k]$ — это разбиение множества $E(G)$ в объединение непересекающихся множеств E_1, \dots, E_k , где ρ принимает значение i на рёбрах множества E_i .

- Графы, рассматриваемые в этом разделе могут иметь кратные рёбра, но не имеют петель.
- В отличие от раскрасок вершин, при рассмотрении раскрасок рёбер кратные рёбра играют существенную роль.

Определение

- 1) Раскраска рёбер ρ называется *правильной*, если $\rho(e) \neq \rho(e')$ для любой пары смежных рёбер e и e' .
- 2) Через $\chi'(G)$ обозначим *хроматический индекс* графа G — наименьшее натуральное число, для которого существует правильная раскраска рёбер графа G в такое количество цветов.

Определение

Пусть ρ — раскраска рёбер графа G в k цветов.

- 1) Пусть $v \in V(G)$. Будем говорить, что в раскраске ρ цвет i *представлен* в вершине v , если существует инцидентное v ребро e такое, что $\rho(e) = i$. Обозначим через $\rho(v)$ количество цветов, представленных в вершине v .
 - 2) Введем обозначение $\rho(G) = \sum_{v \in V(G)} \rho(v)$. Назовем раскраску ρ *k -оптимальной*, если для любой другой раскраски ρ' рёбер графа G в k цветов $\rho(G) \geq \rho'(G)$.
- Пусть ρ — правильная раскраска рёбер графа G в не более чем k цветов. Тогда для каждой вершины $v \in V(G)$ мы имеем $\rho(v) = d_G(v) \geq \rho'(v)$ для любой другой раскраски ρ' . Таким образом, правильная раскраска рёбер всегда является k -оптимальной.

Лемма 5

Пусть G — связный граф, отличный от простого цикла нечетной длины. Тогда существует такая раскраска рёбер G в два цвета, что в каждой вершине степени не менее двух представлены оба цвета.

Доказательство. • Если все вершины G имеют степень 2, то G — четный цикл, для которого утверждение очевидно. Далее рассмотрим другие случаи.

• Если в графе есть вершины нечетной степени, то добавим новую вершину w и соединим её со всеми вершинами нечетной степени графа G . Получится граф \tilde{G} , степени всех вершин которого четны. Если все степени вершин графа G четны, положим $\tilde{G} = G$.

• Если в графе G есть вершины нечетной степени, то положим $a = w$. Если в графе G все вершины имеют четную степень, то есть вершина степени хотя бы 4, то мы выберем в качестве a именно такую вершину.

- В графе \tilde{G} есть эйлеров цикл. Начиная с вершины a , будем красить ребра графа, чередуясь, в цвета 1 и 2 по ходу ЭЦ.
- Пусть $x \neq a$. При $d_G(x) \geq 2$ мы как минимум один раз прошли по ЭЦ через x . Следовательно, существуют два разноцветных ребра графа G , инцидентных x .
- Остается проверить условие для вершины a , что нужно делать только в случае, когда $a \neq w$. Тогда $d_G(a) \geq 4$ и ЭЦ хотя бы один раз прошел через a , а значит, есть два инцидентных a ребра разного цвета. \square
- Отметим, что в Лемме 5 допускается наличие в графе кратных рёбер. Также оно ничем не мешает в следующей лемме.

Лемма 6

Пусть ρ — k -оптимальная раскраска ребер графа G .

Предположим, что вершина w и цвета i и j таковы, что в вершине w хотя бы два раза представлен цвет i и не представлен цвет j . Пусть $H = G(E_i \cup E_j)$, а H_w — компонента графа H , содержащая вершину w . Тогда H_w — простой цикл нечетной длины.

Доказательство.

- Предположим, что H_w не является простым циклом нечетной длины.
- Построим новую раскраску ρ' , отличающуюся от ρ лишь раскраской рёбер из H_w : мы раскрасим их в цвета i и j так, чтобы в каждой вершине x степени $d_{H_w}(x) \geq 2$ были представлены оба цвета i и j (это возможно по Лемме 5).
- Тогда $\rho'(w) = \rho(w) + 1$, а для любой другой вершины x , очевидно, $\rho'(x) \geq \rho(x)$. Таким образом, $\rho'(G) > \rho(G)$, противоречие с k -оптимальностью ρ . □

- Несложно понять, что $\chi'(G) \geq \Delta(G)$: все рёбра, инцидентные вершине наибольшей степени, должны быть разноцветными.

Теорема 9

(D. König, 1916.) Пусть G — двудольный граф (возможно, с кратными рёбрами). Тогда $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Доказательство.

- Пусть $\Delta = \Delta(G)$. Рассмотрим Δ -оптимальную раскраску ρ рёбер графа G .
- Предположим, что раскраска ρ — неправильная. Тогда существует вершина v и цвет i такие, что i дважды представлен в вершине v .
- Так как $d_G(v) \leq \Delta$, существует цвет j , не представленный в вершине v . Тогда по Лемме 6 в графе G есть нечетный цикл, противоречие. Следовательно, раскраска ρ — правильная. □

Определение

- Назовем раскраску ρ рёбер графа G *покрывающей*, если ребра каждого цвета образуют покрытие (то есть покрывают все вершины).
- Через $\kappa'(G)$ обозначим *покрывающий индекс* графа G — наибольшее натуральное число, для которого существует покрывающая раскраска рёбер графа G в такое количество цветов.

Теорема 10

(R. P. Gupta, 1966.) Если граф G — двудольный, то $\kappa'(G) = \delta(G)$.

Доказательство. • Рассмотрим $\delta(G)$ -оптимальную раскраску ρ рёбер графа G .

- Предположим, что раскраска ρ не является покрывающей. Тогда существует вершина v и цвет i такие, что i не представлен в вершине v .
- Так как $d_G(v) \geq \delta(G)$, то существует цвет j , представленный в вершине v не менее, чем дважды. Тогда по Лемме 6 в графе G есть нечетный цикл, противоречие. Следовательно, раскраска ρ — покрывающая.

Теорема 11

(В. Г. Визинг, 1964.) Пусть G — граф без кратных рёбер. Тогда $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Доказательство. (Ж.-С. Fournier, 1973.)

- Пусть $k = \Delta(G) + 1$. Достаточно доказать существование правильной раскраски рёбер G в k цветов. Рассмотрим k -оптимальную раскраску ρ рёбер G .
- Предположим, что раскраска ρ — неправильная. Тогда существует вершина u и цвет i_1 , который дважды представлен в вершине u . Так как $d_G(u) < k$, то существует цвет j , не представленный в вершине u .
- Пусть $uv_1 \in E(G)$, $\rho(uv_1) = i_1$. Так как $d_G(v_1) < k$, существует цвет i_2 , не представленный в v_1 .

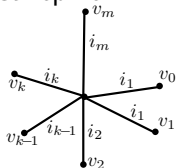
Шаг процесса построения

- Пусть $\ell \geq 1$, а цвета i_1, \dots, i_ℓ различны.
- Пусть рёбра $uv_1, \dots, uv_\ell \in E(G)$ таковы, что $\rho(uv_t) = i_t$ при $t \in [1..\ell]$, причем при $t < \ell$ цвет i_{t+1} не представлен в вершине v_t .
- Так как $d_G(v_\ell) < k$, существует цвет $i_{\ell+1}$, не представленный в вершине v_ℓ .
- Определим раскраску ρ_ℓ : $\rho_\ell(uv_s) = i_{s+1}$ при $s \in [1..\ell]$, $\rho_\ell(e) = \rho(e)$ на остальных рёбрах e .

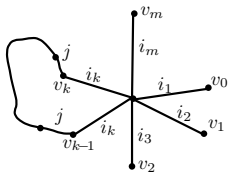
Докажем, что $\rho_\ell(G) \geq \rho(G)$.

- Для вершины $x \notin \{u, v_1, \dots, v_\ell\}$ цвета инцидентных x рёбер не менялись, поэтому $\rho_\ell(x) = \rho(x)$.
- Рассмотрим вершину v_t , $t \in [1..\ell]$. Цвет i_{t+1} не представлен в вершине v_t в раскраске ρ , но представлен в раскраске ρ_ℓ . Цвет i_t представлен в раскраске ρ и, возможно, не представлен в раскраске ρ_ℓ . Все ребра, кроме uv_t не изменили цвета, поэтому $\rho_\ell(v_t) \geq \rho(v_t)$.
- Рассмотрим вершину u . В результате перекрашивания рёбер uv_1, \dots, uv_ℓ из их цветов исчез i_1 и появился $i_{\ell+1}$. Однако, цвет i_1 представлен в вершине u в раскраске ρ_ℓ : $\rho_\ell(uv_0) = i_1$.
- Поэтому $\rho_\ell(u) \geq \rho(u)$ и $\rho_\ell(G) \geq \rho(G)$.

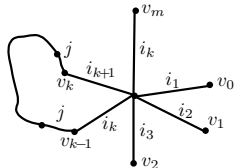
- Из k -оптимальности ρ следует, что ρ_ℓ также k -оптимальна. Более того, $\rho_\ell(G) = \rho(G)$, следовательно, $\rho_\ell(u) = \rho(u)$. Это означает, что цвет $i_{\ell+1}$ представлен в вершине u в раскраске ρ , пусть $\rho(uv_{\ell+1}) = i_{\ell+1}$. Шаг завершен!



а



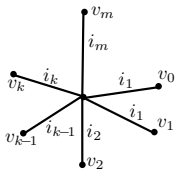
б



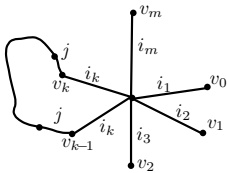
с

- Поскольку у вершины u конечное число соседей, на некотором шаге построения мы впервые получим $i_{m+1} = i_k$. Рассмотрим k -оптимальные раскраски ρ_{k-1} и ρ_m (мы положим $\rho_0 = \rho$). На рисунке изображены цвета рёбер, соединяющих u с v_0, v_1, \dots, v_m в раскрасках ρ (рис. а), ρ_{k-1} (рис. б) и ρ_m (рис. с).
- В обеих раскрасках в вершине u дважды представлен цвет i_k : $\rho_{k-1}(uv_{k-1}) = \rho_{k-1}(uv_k) = i_k$, $\rho_m(uv_m) = \rho_m(uv_{k-1}) = i_k$.

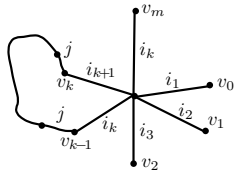
- Пусть E_s — множество всех ребер цвета s в раскраске ρ_{k-1} ,
а E'_s — множество всех ребер цвета s в раскраске ρ_m ,
 $H = G(E_{i_k} \cup E_j)$ и $H' = G(E'_{i_k} \cup E'_j)$.



a



b



c

- По Лемме 6 из оптимальности раскрасок ρ_{k-1} и ρ_m следует, что содержащие вершину u компоненты связности графов H и H' — простые циклы нечетной длины.
- Тогда $d_H(v_k) = 2$: из v_k выходит ребро uv_k цвета $\rho_{k-1}(uv_k) = i_k$ и ребро цвета j . Для всех рёбер e цикла H , кроме uv_k мы имеем $\rho_{k-1}(e) = \rho_m(e)$, поэтому $d_{H'}(v_k) = d_H(v_k) - 1 = 1$.
- Очевидно, v_k и u лежат в одной компоненте связности графа H' , которая должна быть НЦ. Противоречие.
- Полученное противоречие показывает, что ρ — искомая правильная раскраска рёбер графа G в $\Delta(G) + 1$ цвет.



Списочные раскраски

- *Списочные раскраски* (list colorings) впервые были определены Визингом в 1976 году (он их назвал *предписанными раскрасками*).
- Каждой вершине графа $v \in V(G)$ ставится в соответствие *список* $L(v)$, после чего рассматривается правильная раскраска вершин с дополнительным ограничением: каждая вершина v должна быть покрашена в цвет из списка $L(v)$.
- Минимальное такое $k \in \mathbb{N}$, что для любых списков из k цветов существует правильная раскраска вершин графа G , обозначается через $\text{ch}(G)$ (и носит название *списочное хроматическое число*, по-английски — *choice number*).
- Во всех случаях, когда речь идет о списках цветов, мы будем обозначать список большой буквой (как правило, L), а его *размер* — соответствующей строчной: так, $\ell(v) = |L(v)|$.
- Очевидно, $\text{ch}(G) \geq \chi(G)$. Существуют графы, для которых $\text{ch}(G) > \chi(G)$.

- Аналогично списочным раскраскам вершин можно определить списочные раскраски рёбер и **списочный хроматический индекс** $\text{ch}'(G)$.
- Очевидно, $\text{ch}'(G) \geq \chi'(G)$. В отличие от ситуации со списочными раскрасками вершин, не известно ни одного графа, для которого $\text{ch}'(G) > \chi'(G)$.
- Более того, выдвинута гипотеза (*List Color Conjecture*) о том, что $\text{ch}'(G) = \chi'(G)$ для любого графа G . В 1995 году Гэльвин доказал эту гипотезу для двудольных графов.

k -редуцируемые графы

Определение

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Граф G называется *k -редуцируемым*, если его вершины можно занумеровать v_1, \dots, v_n так, что каждая вершина смежна менее чем с k вершинами с бОльшим номером.

Лемма 7

Пусть G — k -редуцируемый граф. Тогда $\chi(G) \leq \text{ch}(G) \leq k$.

Доказательство.

- Пусть v_1, \dots, v_n — нумерация вершин графа из определения, причем каждой вершине v_i соответствует список $L(v_i)$ длины $\ell(v_i) \geq k$.
- Покрасим вершины в порядке, обратном нумерации.
- При покраске вершины v_i количество запретов на цвет не превосходит количество ее соседей среди вершин с бОльшим номером, а таких не более $k - 1$.
- Значит, мы можем покрасить вершину v_i в цвет из ее списка.



- Докажем критерий k -редуцируемости графа.

Лемма 8

Граф G является k -редуцируемым, если и только если для любого его подграфа H выполняется $\delta(H) \leq k - 1$.

Доказательство.

⇒. • Пронумеруем вершины графа G как в определении.

- Предположим противное, пусть подграф H таков, что $\delta(H) \geq k$.

- Пусть $v_i \in V(H)$ — вершина с наименьшим номером.

- Тогда v_i смежна не менее чем с $d_H(v_i) \geq \delta(H) \geq k$ вершинами с БОльшим номером, противоречие.

⇐. • Пусть v_1 — вершина графа G наименьшей степени. Тогда она смежна не более чем с $d_G(v_1) = \delta(G) \leq k - 1$ вершинами.

- Предположим, что вершины v_1, \dots, v_{i-1} уже построены.

- Положим $G_i = G - \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$. Тогда граф G_i имеет вершину степени не более $\delta(G_i) \leq k - 1$ — именно она и будет вершиной v_i . □

- В 1976 году Визинг доказал списочную версию теоремы Брукса. Мы приведем более общий результат, доказанный Бородиным в 1977 году.

Определение

- Граф G называется *d -раскрашиваемым* (английский вариант этого термина — *d -choosable*), если для любого набора списков L , удовлетворяющего условию $\ell(v) \geq d_G(v)$ для каждой вершины $v \in V(G)$, существует правильная раскраска вершин графа G в цвета из списков.
- Список цветов, удовлетворяющие указанному условию, будем называть *d -списком*.

Определение

Назовем вершину $v \in V(G)$ *избыточной*, если $\ell(v) > d_G(v)$.

Лемма 9

Пусть G — связный граф, а L — d -список, в котором вершина $a \in V(G)$ избыточная. Тогда существует правильная раскраска вершин графа G в соответствии со списком L .

Доказательство. • Индукция по количеству вершин. База для графа с одной вершиной (естественно, избыточной) очевидна.

- Будем считать, что утверждение доказано для любого связного графа с меньшим чем $v(G)$ количеством вершин.
- Рассмотрим граф $G - a$. Пусть G_1, \dots, G_k — все компоненты графа $G - a$.
- В каждом графе G_i (где $i \in [1..k]$) ввиду связности графа G обязательно есть вершина a_i , смежная с a .
- Рассмотрим граф G_i , оставив списки вершин неизменными. Тогда a_i станет избыточной вершиной (так как $d_{G_i}(a_i) \leq d_G(a_i) - 1 \leq \ell(a_i) - 1$).
- По индукционному предположению вершины всех графов G_1, \dots, G_k можно покрасить в соответствии со списками.
- Так как $d_G(a) < \ell(a)$, мы можем докрасить вершину a в один из цветов ее списка $L(a)$, не нарушая правильности раскраски графа.

Лемма 10

Пусть G — связный граф, а L — d -список. Предположим, что существуют две смежные вершины $a, b \in V(G)$ такие, что граф $G - a$ связан и $L(a) \not\subset L(b)$. Тогда существует правильная раскраска вершин графа G в соответствии со списком L .

Доказательство. • Пусть $1 \in L(a) \setminus L(b)$.

- В связном графе $G - a$ из всех списков вершин множества $N_G(a)$, содержащих цвет 1, удалим этот цвет, остальные списки оставим без изменений.
- Получим новые списки $L'(v)$ графа $G - a$.
- Все вершины графа $G - a$ нормальны: для вершин не из $N_G(a)$ это очевидно, а для $v \in N_G(a)$ мы имеем $\ell'(v) \geq \ell(v) - 1 \geq d_G(v) - 1 = d_{G-a}(v)$.
- Из $1 \notin L(b)$ следует, что $\ell'(b) = \ell(b)$.
- Так как $d_{G-a}(b) = d_G(b) - 1$, вершина b является избыточной.
- По Лемме 9 существует правильная раскраска вершин графа $G - a$ в цвета из списка L' .
- Докрасим a в цвет 1, мы получим правильную раскраску вершин графа G в цвета списка L .

Определение

Связный граф, в котором каждый блок — нечетный цикл или полный граф, называется *деревом Галлаи*.

Теорема 12

(О. В. Бородин, 1977.) Если связный граф G не является деревом Галлаи, то G d -раскрашиваем.

Доказательство. • Пусть каждой вершине v соответствует список $L(v)$. НУО $\ell(v) = d_G(v)$ для каждой вершины $v \in V(G)$.

• Докажем утверждение индукцией по размеру графа.

База: G двусвязен.

• Если не все списки одинаковы, то существуют две смежные вершины a и b с $L(a) \neq L(b)$ и G раскрашиваем по Лемме 10.

• Значит, все списки одинаковы, пусть в них, скажем, d цветов. Тогда и все степени вершин одинаковы и равны d .

• Таким образом, мы имеем дело с правильной раскраской графа степени d в d цветов.

• По условию граф G отличен от полного графа и нечетного цикла. Значит, по теореме Брукса искомая раскраска существует.

Переход: G недвусвязен.

- Пусть для меньшего чем G графа теорема доказана.
- Рассмотрим крайний блок B графа G , отделяемый от остального графа точкой сочленения a .
- Можно считать, что в графе G есть блок, отличный от B , от нечетного цикла и полного графа (иначе рассмотрим в качестве B другой крайний блок).
- Граф $B - a$, очевидно, связан, все его вершины по условию нормальны, а все смежные с a вершины (такие есть!) — избыточны.
- Поэтому по Лемме 9 его вершины можно покрасить в соответствие со списками.
- Пусть $G' = G - \text{Int}(B)$. Граф G' имеет те же самые блоки, что G , кроме B , а значит, среди них есть блок, отличный от нечетного цикла и полного графа.
- Списки всех отличных от a вершин не изменились, а их степени — такие же, как в графе G .

- Новый список $L'(a)$ будет содержать все цвета списка $L(a)$, кроме тех, что использованы для раскраски вершин из $N_B(a)$.
- Таких цветов не более чем $d_B(a)$, а $d_G(a) = d_B(a) + d_{G'}(a)$. Поэтому $\ell'(a) \geq d_{G'}(a)$.
- По индукционному предположению существует правильная раскраска вершин G' в цвета из списка.
- Вместе с раскраской графа $B - a$ мы получаем искомую правильную раскраску вершин графа G . □
- Условие d -раскрашиваемости из Теоремы 12 является не только достаточным, но также и необходимым.
- Для любого дерева Галлаи можно придумать d -список, в который его вершины нельзя правильно покрасить.

Теорема 13

(В. Г. Визинг, 1976.) Пусть $d \geq 3$, а G — связный граф, отличный от K_{d+1} , $\Delta(G) \leq d$. Тогда $\text{ch}(G) \leq d$.

Доказательство. • Пусть каждой вершине $v \in V(G)$ соответствует список $L(v)$, причём $\ell(v) \geq d$.

- Если G — не дерево Галлаи, он раскрасшиваем по Теореме 12.
- Пусть G — дерево Галлаи, то есть, все блоки графа G — нечетные циклы и полные графы.
- Из условия следует, что G недвусвязен. Тогда его блоки отличны от K_{d+1} .
- Рассмотрим крайний блок B графа G и его вершину b , не являющуюся точкой сочленения.
- Очевидно, $\ell(b) \geq d > d_B(b) = d_G(b)$, а значит, вершина b — избыточна и искомая раскраска существует по Лемме 9. □