Теория графов. Глава 8. Сети и потоки.

Д. В. Карпов

Сеть

- Задано множество вершин V, в котором выделены две вершины: s (*вход* или *исток*) и t (*выход* или *сток*).
- Определена функция $c : V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая для любых вершин $x, y \in V$ соотношениям

$$c(x, y) \geq 0,$$
$$c(x, s) = 0,$$
$$c(t, y) = 0$$

Тогда $G = (V, s, t, c)$ — *сеть*, функция c называется *пропускной способностью* сети G.

Множество $A(G) = \{(x, y) \ : \ c(x, y) > 0\}$ называется *множеством стрелок* сети G.

- Мы часто будем рассматривать сеть G как орграф с множеством вершин V и множеством стрелок $A(G)$.
- Например, говоря "путь в сети G", будем иметь в виду путь в орграфе $(V, A(G))$.

Поток

Определение

Пусть G — сеть, а функция $f : V \times V \to \mathbb{R}$ удовлетворяет трем условиям:

$(F1)$ для любых $x, y \in V$ $f(x, y) \le c(x, y)$;

$(F2)$ для любых $x, y \in V$ $f(x, y) = -f(y, x)$;

$(F3)$ для любой вершины $v \in V$, $v \neq s, t$ выполняется условие $\sum\limits_{x \in V} f(v, x) = 0$.

- Тогда f — *поток* в сети G.
- Число $|f| = \sum\limits_{x \in V} f(s, x)$ называется *величиной потока*.
- Поток сети G с максимальной величиной называется *максимальным*.

- Вообще-то не очевидно, что максимальный поток существует.

Разрез

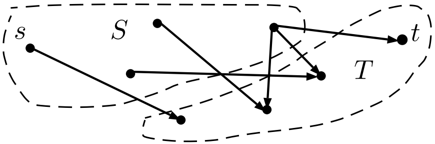
Определение

1) Пусть G — сеть, а множество ее вершин V разбито на два непересекающихся множества $S \ni s$ и $T \ni t$. Тогда (S,T) — *разрез* сети G.

2) Величина $c(S,T) = \sum\limits_{x\in S,\, y\in T} c(x,y)$ называется *пропускной способностью разреза*.

3) Любой разрез сети G с минимальной пропускной способностью называется *минимальным*.

4) Для любого потока f в сети G величина $f(S,T) = \sum\limits_{x\in S,\, y\in T} f(x,y)$ называется *потоком через разрез* (S,T).



• Нетрудно понять, что минимальный разрез сети существует. Возможно, таких разрезов несколько.

Лемма 1

Для любого потока f и разреза (S,T) сети G выполняется $|f| = f(S,T)$.

Доказательство. • Ввиду условия $(F3)$

$$|f| = \sum_{x\in V} f(s,x) = \sum_{y\in S}\left(\sum_{x\in V} f(y,x)\right). \qquad (*)$$

• В правой части равенства $(*)$ для любых двух вершин $y,z\in S$ присутствуют слагаемые $f(y,z)$ и $f(z,y)$, в силу $(F2)$ в сумме дающие 0. Поэтому,

$$\sum_{y\in S}\left(\sum_{x\in V} f(y,x)\right) = \sum_{u\in S,\, v\in T} f(u,v) = f(S,T),$$

что и требовалось доказать. □

Остаточная сеть. Дополняющий путь

Определение

1) Пусть f — поток в сети G. Рассмотрим сеть G_f с теми же V, s, t и пропускной способностью

$$c_f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y = s \text{ или } x = t, \\ c(x,y) - f(x,y) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Назовем G_f *остаточной сетью* потока f.

2) *Дополняющий путь* потока f — это любой путь st-путь в остаточной сети G_f.

Лемма 2

Пусть f — поток в сети G, f' — поток в остаточной сети G_f. Тогда $f + f'$ — поток в сети G, причём $|f + f'| = |f| + |f'|$.

Доказательство. Нетрудно проверить для потока $f + f'$ условия $(F1)$, $(F2)$ и $(F3)$. Утверждение про величину потока очевидно.

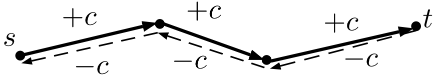
Поток вдоль пути

Определение

Пусть P — st-путь в сети G, а c — минимальная пропускная способность стрелки пути P. Определим поток f_P *вдоль пути P*:

$$f_P(x,y) = c \text{ при } xy \in A(P), \quad f_P(x,y) = -c \text{ при } yx \in A(P),$$

$$f_P(x,y) = 0 \text{ при } xy, yx \notin A(P).$$



- Нетрудно понять, что f_P — действительно поток.

Теорема Форда-Фалкерсона

Теорема 1

(L. R. Ford, D. R. Fulkerson, 1956.) *В сети $G = (V, s, t, c)$ задан поток f. Тогда следующие три утверждения равносильны.*

1° *Поток f максимален.*

2° *Существует такой разрез (S, T), что $|f| = c(S, T)$;*

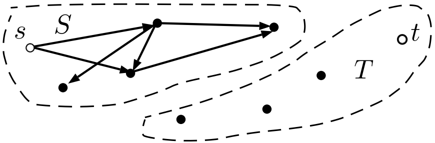
3° *В остаточной сети G_f нет дополняющего пути.*

Доказательство. $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Рассмотрим другой поток f'. По Лемме 1

$$|f'| = f'(S, T) = \sum_{x \in S,\, y \in T} f'(x, y)$$
$$\le \sum_{x \in S,\, y \in T} c(x, y) = c(S, T) = |f|,$$

откуда следует максимальность f.

$1^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Предположим противное, пусть в остаточной сети G_f есть дополняющий путь P, а f_P — поток вдоль пути P. По Лемме 2 тогда $f + f_P$ — поток в G, причём $|f + f_P| = |f| + |f_P| > |f|$, противоречие с максимальностью f.



$3^\circ \Rightarrow 2^\circ$. • Пусть S — множество всех вершин, достижимых из s в остаточной сети G_f (см. рисунок).

• Так как в G_f нет дополняющего пути, то $t \notin S$. Тогда $(S, T = V \setminus S)$ — разрез в сетях G и G_f.

• По построению $A_{G_f}(S, T) = \varnothing$. следовательно, $0 = c_f(S, T) = c(S, T) - f(S, T)$, откуда $c(S, T) = f(S, T) = |f|$ (последнее равенство следует из Леммы 1). $\square$

Следствие 1

Величина максимального потока в сети G равна пропускной способности минимального разреза сети G.

Доказательство.

• Рассмотрим максимальный поток f и такой разрез (S, T), что $|f| = c(S, T)$ (такой разрез существует по теореме 1).

• Тогда для любого другого разреза (S', T') мы имеем $c(S', T') \geq f(S', T') = f(S, T) = c(S, T)$. Значит, разрез (S, T) минимален. $\square$

Определение

• Сеть G называется **целой**, если ее пропускная способность c — целочисленная.

• Поток f называется **целым**, если на любой паре вершин он принимает целочисленное значение.

Теорема 2

В целой сети G существует максимальный поток. Среди максимальных потоков целой сети найдется целый.

Доказательство. • Будем последовательно строить поток. Изначально положим $f = 0$.

• Пусть в некоторый момент есть целый поток f в целочисленной сети G. Рассмотрим остаточную сеть G_f. Если в G_f нет дополняющего пути P, то по Теореме 1 поток f максимальный.

• Если же в G_f есть дополняющий путь P, то рассмотрим поток f_P вдоль пути P в остаточной сети G_f и положим $f := f + f_P$.

• По Лемме 2 мы построили новый целый поток в G, причем его пропускная способность на $|f_P|$ больше, чем у предыдущего.

• Так как с каждым шагом величина потока возрастает на целую величину (хотя бы на 1), процесс обязательно закончится, в результате мы получим целый максимальный поток в сети G. □

Рёберная теорема Менгера

• Именно так обычно называют следующую теорему. Несмотря на то, что эта теорема имеет много общего с теоремой Менгера и даже может быть из нее выведена, впервые она была доказана Фордом и Фалкерсоном в качестве примера применения разработанного ими метода.

Определение

Пусть G — неориентированный граф без петель, кратные рёбра допускаются.
Для $x, y \in V(G)$ обозначим через $\lambda_G(x, y)$ размер минимального множества рёбер, отделяющего x от y.
Назовем $\lambda_G(x, y)$ *рёберной связностью* вершин x и y.

Теорема 3

(L. R. Ford, D. R. Fulkerson, 1956.) *Пусть $s, t \in V(G)$. Тогда существует $\lambda_G(s, t)$ путей из s в t, не имеющих общих рёбер.*

Доказательство. • Построим сеть $\vec{G}$ на множестве вершин $V(G)$. Входом будет s, выходом будет t.

• Определим пропускные способности: $c(x,y)$ равняется *кратности* ребра xy в графе G (то есть, 0, если такого ребра нет, и m, если в графе G есть m кратных рёбер xy). Дополнительно определим $c(x,s) = c(t,x) = 0$ для всех $x \in V(G)$.

• Отметим, что при $x, y \notin \{s,t\}$ мы имеем $c(x,y) = c(y,x)$.

• Сеть $\vec{G}$ — целая. По Теореме 2 в ней есть целый максимальный поток f. Пусть $|f| = k$.

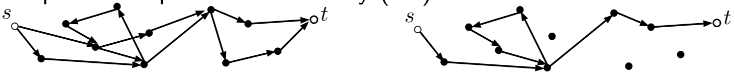
Утверждение

Поток f распадается на k st-путей без общих рёбер.

Доказательство. • Построим новый орграф G' на тех же вершинах. Если $f(x,y) = \ell > 0$ для $x, y \in V(G)$, мы проведем в G' ровно ℓ стрелок xy.

• Понятно, что $\ell \in \mathbb{Z}$ и в графе G есть не менее ℓ ребер, соединяющих x и y.

• Из вершины s выходит ровно k стрелок, а в каждой отличной от s и t вершине v по свойству потока $(F3)$ количества входящих и выходящих стрелок равны (см. рис. a). Встречных стрелок по свойству $(F2)$ потока нет.



a b

• Выйдем из s и будем каждый раз проходить по стрелке орграфа G', по которой еще не ходили. В некоторый момент мы достигнем t (если в любую другую вершину мы вошли, сможем и выйти, см. рис. b).

• Удалим из G' стрелки пройденного пути, теперь из s выходит $k-1$ стрелка. Повторим эти действия еще $k-1$ раз. В результате будет выделено k непересекающихся по рёбрам st-путей в графе G (не обязательно простых). □

• Вернемся к доказательству Теоремы 3. По Теореме 1 для максимального потока f существует такой разрез (S,T) нашей сети, что $c(S,T)=|f|=k$.

• Тогда из S в T выходит ровно k рёбер графа G (так как для $x\in S$ и $y\in T$ пропускная способность $c(x,y)$ равна количеству рёбер между x и y). Эти k рёбер отделяют S от T, а стало быть, и s от t в графе G. Значит, $k\ge\lambda_G(s,t)$. □

Определение

Граф называется **рёберно k-связным**, если он остается связным после удаления любого множества, состоящего из менее чем k рёбер.

Следствие

В рёберно k-связном графе G для любых двух вершин s, t существует k путей из s в t, не имеющих общих рёбер.

Доказательство. Достаточно применить Теорему 3 к паре вершин s и t.

Максимальный поток в произвольной сети

Теорема 4

(Е. А. Диниц, 1970). *В произвольной сети G существует максимальный поток.*

Доказательство. • План доказательства такой же, как и в Теореме 2: мы будем постепенно увеличивать максимальный поток, добавляя к нему поток вдоль дополняющего пути. Однако, на этот раз нам нельзя произвольно выбирать дополняющий путь.

• Пусть в некоторый момент построен поток f в сети G. Рассмотрим остаточную сеть G_f. Если в G_f нет дополняющего пути P, то по Теореме 1 поток f максимальный. Пусть в G_f есть дополняющие пути.

• Мы выберем самый короткий дополняющий путь P в G_f, рассмотрим поток f_P вдоль пути P и положим $f' := f + f_P$. Почему же этот процесс когда-нибудь закончится?

Утверждение

Пусть Q — простой st-путь в остаточной сети $G_{f'}$, которого нет в остаточной сети G_f. Тогда Q длиннее, чем P.

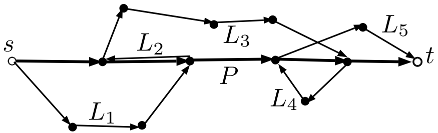
Доказательство. • Пусть $s = x_0x_1 \dots x_k = t$ — это путь P. Понятно, что путь P — простой, а значит, все его вершины различны.

• Сначала поймем, какие же стрелки могут входить в $A(G_{f'}) \setminus A(G_f)$. Такая стрелка yz имеет $c_f(y,z) = 0$, но $0 < c_{f'}(y,z) = c_f(y,z) - f_p(y,z)$. Значит, $zy \in A(P)$, то есть, $z = x_i$ и $y = x_{i+1}$ для некоторого i. По условию, путь Q содержит хотя бы одну такую стрелку.

• *Трансверсаль* пути P — это путь между двумя его вершинами, внутренние вершины которого не принадлежат P.

• Назовём x_ix_j-трансверсаль L пути P *правильной*, если $i < j$ и *неправильной* в противном случае.

• Стрелку x_ix_{i+1}, мы будем считать правильной трансверсалью пути P, а стрелку $x_{i+1}x_i$ — неправильной.



• Путь Q разбивается на трансверсали пути P — пусть это $L_1, \dots, L_m$. Как показано выше, среди них есть хотя бы одна обратная стрелка пути P — а это неправильная трансверсаль.

• Пусть L — правильная x_ix_j-трансверсаль пути P. Тогда все стрелки трансверсали L лежат в $A(G_f)$. Если L короче, чем x_iPx_j, то мы могли бы заменить этот участок пути P на трансверсаль L и найти в G_f более короткий путь, чем P, противоречие с выбором пути P.

• Таким образом, каждая правильная трансверсаль пути P не короче участка пути P между ее концами. Заменим каждую правильную трансверсаль на соответствующий участок между ее концами — в результате получится st-маршрут Q', который не длиннее st-пути Q.

• Поскольку и P, и Q' ведут из s в t, маршрут Q' содержит все рёбра пути P. Так как Q (а стало быть, и Q') содержит хотя бы одну неправильную трансверсаль пути P, маршрут Q' (а следовательно, и путь Q) строго длиннее чем P. $\square$

• Вернемся к доказательству Теоремы 4

• После каждого шага алгоритма построения потока взамен одного из кратчайших путей из s в t в остаточной сети могут появиться лишь строго более длинные пути.

• Значит, в результате каждого шага либо увеличивается длина кратчайшего st-пути, либо эта длина сохраняется, но уменьшается количество кратчайших st-путей.

• Отметим, что кратчайший путь — всегда простой, а длина простого пути из s в t ограничена количеством вершин сети. Значит, процесс построения закончится, и в результате получится остаточная сеть без дополняющих путей. По Теореме 1 это означает, что будет построен максимальный поток. $\square$