Связность графов

Д. В. Карпов

Оглавление

Предисловие от автора

Когда-то я хотел написать книгу по теории графов — обзорный курс. Сначала книга была небольшой, состояла в основном из теорем, рассказываемых на курсе Дискретной математике в 211 группе мат-меха СПбГУ (эта группа неофициально называлась ПОМИ-потоком...). Потом книга становилась все больше и больше. Особенно в некоторых частях. Особенно в главе Связность. Потому что я занимаюсь в основном связностью графов, и про эту область могу сказать больше чем про другие. Потому, что на этот предмет у меня есть свой, ярко выраженный взгляд.

Но в обзорном курсе не нужно допускать перекосов, поэтому я оставлю там только более-менее несложные теоремы, а все остальное и даже больше — напишу здесь. Чтобы было. С надеждой на то, что когдланибудь кому-нибудь именно эта книга будет интересной. Потому что это мой взгляд на Связность графов, а значит, и мой взгляд на математику.

Глава 1

Введение

Начнем с необходимых нам элементарных понятий теории графов и обозначений. Знающий предмет читатель, на которого и ориентирована эта книга, может прочитать этот раздел по диагонали.

1.1 Вершины и рёбра

Пусть G — граф. Что это такое в нашем понимании? Все как обычно, *граф* $G = (V(G), E(G))$, где $V(G)$ — *множество вершин* графа G, а $E(G)$ — *множество ребер* графа G. В этой книге рассматриваются только конечные неориентированные графы, множества вершин и рёбер всегда конечны.

Мы будем повсеместно отождествлять одноэлементное множество $\{x\}$, состоящее из вершины или ребра графа собственно с x — этой вершиной или ребром.

Мы рассматриваем графы без петель и кратных рёбер. Каждое ребро графа — это неупорядоченная пара различных его вершин. Про концы ребра $e = xy$ — вершины x и y — мы будем говорить, что они *соединены ребром* e. Соединённые ребром вершины мы будем называть *смежными*, также мы будем называть и рёбра, имеющие общий конец. Если вершина x — конец ребра e, то мы будем говорить, что x и e *инцидентны*. Количество вершин графа G мы будем обозначать через $v(G)$, а количество ребер — через $e(G)$.

Определение 1.1. Для любой вершины $v \in V(G)$ через $\mathrm{N}_G(v)$ мы будем обозначать *окрестность* вершины v — множество всех вершин графа G, смежных с v. Для любого множества вершин $U \subset V(G)$ через $\mathrm{N}_G(U)$ мы будем обозначать множество всех вершин графа G, смежных хотя бы с одной вершиной множества U.

Определение 1.2. Мы будем говорить, что вершина $u \in V(G)$ *смежна* с множеством $W \subset V(G)$, если $u \notin W$ и множество W содержит вершину, смежную с u.

Про два непересекающихся множества $U, W \subset V(G)$ будем говорить, что они *смежны*, если существуют смежные вершины $u \in U$ и $w \in W$.

Через K_n мы будем обозначать *полный* граф на n вершинах — граф, у которого любые две различные вершины соединены одним ребром. Через $\overline{G}$ мы будем обозначать *дополнение* графа G, то есть, граф на вершинах из $V(G)$, ребра которого дополняют $E(G)$ до множества ребер полного графа. Граф $\overline{K_n}$ мы будем называть *пустым*.

Отметим, что пустой граф — это не пустое множество, а граф без рёбер. Более того, граф в нашем понимании — это не просто множество вершин и рёбер, а еще и отношения смежности и инцидентности.

Определение 1.3. 1) Для вершины $x \in V(G)$ через $d_G(x)$ обозначим *степень* вершины x в графе G, то есть, количество рёбер графа G, инцидентных x.

2) Минимальную степень вершины графа G обозначим через $\delta(G)$.

3) Максимальную степень вершины графа G обозначим через $\Delta(G)$.

Определение 1.4. Граф G называется *регулярным*, если степени всех его вершин одинаковы. Если все эти степени равны k, мы также будем называть G регулярным графом степени k.

1.2 Подграфы

Граф H является *подграфом* графа G, если $V(H) \subset V(G)$ и $E(H) \subset E(G)$. Особо выделим два важных класса подграфов — *остовные* и *индуцированные*.

Подграф H графа G — *остовный*, если $V(H) = V(G)$.

Пусть $U \subset V(G)$. Через $G(U)$ мы обозначим *индуцированный подграф* на множестве вершин U. Эта запись означает, что $V(G(U)) = U$, а $E(G(U))$ состоит из всех рёбер множества $E(G)$, оба конца которых лежат в U.

Пусть $F \subset E(G)$. Через $G(F)$ мы обозначим *индуцированный подграф* на множестве рёбер F. Это значит, что $E(G(F)) = F$, а $V(G(F))$ состоит из всех вершин множества $V(G)$, инцидентных хотя бы одному ребру из F. Кроме того, мы будем использовать обозначение $G[F]$ для графа $(V(G), F)$.

1.3 Удаление и стягивание рёбер

Определение 1.5. 1) Для любого множества ребер $F \subset E(G)$ обозначим через $G - F$ граф, полученный из G в результате удаления ребер множества F (то есть, $G - F = (V(G), E(G) \setminus F)$.

2) Для любой вершины $v \in V(G)$ обозначим через $G - v$ граф, полученный из G в результате удаления вершины v и всех инцидентных ей ребер. Для любого множества вершин $U \subset V(G)$ обозначим через $G - U$ граф, полученный из G в результате удаления вершин множества U и всех инцидентных им ребер.

3) Пусть e — ребро, соединяющее пару вершин из $V(G)$, не обязательно входящее в $E(G)$. Через $G + e$ мы будем обозначать граф, полученный из G в результате добавления ребра e (если $e \notin E(G)$, то $G + e = (V(G), E(G) \cup \{e\})$, а если $e \notin E(G)$, то $G + e = G$).

Определим гораздо более сложно описываемую операцию — *стягивание* ребра.

Определение 1.6. Для ребра $e \in E(G)$ через $G \cdot e$ мы обозначим граф, полученный в результате *стягивания* ребра $e = xy$. Это означает, что граф $G \cdot e$ получается из графа $G - x - y$ добавлением новой вершины w, которая будет смежна в графе $G \cdot e$ со всеми вершинами графа G, смежными в G хотя бы с одной из вершин x и y.

Для вершин этих графов мы будем применять обозначение $w = x \cdot y$.

Таким образом, при описанной операции концы x и y ребра e стягиваются в новую вершину w.

1.4 Пути, циклы и маршруты

Определение 1.7. 1) Последовательность вершин $a_1a_2 \dots a_n$ графа G, в которой $a_ia_{i+1} \in E(G)$ для всех $i \in [1..n-1]$ называется *маршрутом.*

2) Мы будем говорить, что этот маршрут *проходит* по рёбрам a_1a_2, $\dots$, $a_{n-1}a_n$ и по вершинам $a_1, a_2, \dots, a_n$.

3) Маршрут называется *замкнутым*, если $a_1 = a_n$.

Отметим, что вершины маршрута *не обязательно различны.* Более того, рёбра, по которым проходит маршрут, *не обязательно различны.*

Определение 1.8. 1) *Путь* — это маршрут $a_1a_2 \dots a_n$, не проходящий ни по какому ребру дважды.

2) Кроме того, мы будем говорить, что путь — это подграф P графа G, в котором $V(P) = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$, $E(P) = \{a_1a_2, \dots, a_{n-1}a_n\}$. Внутренность $\mathrm{Int}(P)$ пути P — это множество всех его вершин, кроме концов.

3) Вершины a_1 и a_n называются *концами* пути.

4) Путь называется *простым*, если все вершины $a_1, \dots, a_n$ — различны.

5) *Длина* пути — это количество его рёбер.

Определение 1.9. *Расстоянием* между вершинами x и y графа G называется длина наименьшего пути между ними. Обозначение: $\mathrm{dist}_G(x, y)$

Итак, путь у нас — это одновременно последовательность вершин, в которой все пары соседних вершин соединены ребрами, а также подграф из этих вершин и рёбер. Эта двусмысленность в дальнейшем нисколько не помешает изложению материала. Мы будем часто применять термин *xy-путь* для подчеркивания того, что концы этого пути — это вершины x и y. Нам понадобится и более общее определение.

Определение 1.10. Пусть $X, Y \subset V(G)$. Назовем *XY-путем* любой простой путь с началом в множестве X и концом в множестве Y, внутренние вершины которого не принадлежат множествам X и Y.

Отметим, что если $u \in X \cap Y$, то мы считаем вершину u XY-путем.

Определение 1.11. 1) *Цикл* — это путь, начало которого совпадает с концом.

2) Кроме того, мы будем говорить, что цикл — это подграф P графа G, в котором $V(P) = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$, $E(P) = \{a_1a_2, \dots, a_{n-1}a_n, a_na_1\}$.

3) Цикл называется *простым*, если все вершины $a_1, \dots, a_n$ — различны.

4) *Длина* цикла — это количество его рёбер.

Как и в ситуации с путём, цикл — это одновременно последовательность вершин и подграф. Для цикла нет смысла выделять одну из вершин, и называть ее началом и концом цикла. Более того, мы будем считать, что цикл не изменяется при циклической перестановке его вершин.

Лемма 1.1. 1) *Для любого цикла Z существует такой простой цикл Z', что $V(Z') \subset V(Z)$ и $E(Z') \subset E(Z)$.*

2) *Если в графе есть нечетный цикл, то есть и простой нечетный цикл.*

Доказательство. 1) Рассмотрим любую вершину a нашего цикла и пойдем от нее до тех пор, пока не окажемся в вершине, в которой уже были. Это, очевидно, произойдет (мы должны вернуться в a). Пусть первая повторившаяся вершина — это b. Тогда в вершине b мы закончим, получив простой цикл, вершины и ребра которого входят в исходный цикл.

2) Предположим, что наш цикл — не простой и начнем, как в предыдущем пункте: найдем первую повторившуюся вершину b. Тогда можно изменить порядок обхода нашего большого цикла Z в вершине b и разомкнуть его на два цикла: простой цикл Z', описанный в пункте 1 и цикл Z_1 из осташихся рёбер цикла Z. Эти циклы имеют общую вершину v и $e(Z) = e(Z_1)+e(Z')$, а значит, либо $e(Z')$ нечетно (тогда цикл Z' — искомый), либо $e(Z_1)$ нечетно, тогда пордолжим рассуждения с меньшим нечетным циклом Z_1. □

1.5 Связные графы. Деревья

Определение 1.12. 1) Вершины a и b графа G называются *связанными*, если в графе существует путь между ними.

2) Граф называется *связным*, если любые две его вершины связаны.

3) Очевидно, связанность вершин — отношение эквивалентности, и все вершины графа по этому отношению разбиваются на классы эквивалентности — множества попарно связанных вершин. Эти классы эквивалентности мы будем называть *компонентами связности* графа G.

4) Множество $U \subset V(G)$ называется *связным*, если граф $G(U)$ связен.

Таким образом, компонента связности — это максимальное по включению связное множество вершин графа. Часто под компонентами связности графа G подразумевают максимальные связные подграфы этого графа, то есть, индуцированные подграфы на компонентах связности в смысле нашего определения.

Определение 1.13. 1) *Дерево* — это связный граф без циклов.

2) *Лес* — это граф без циклов.

3) Вершина x графа G, имеющая степень 1, называется *висячей вершиной* или *листом.*

Разумеется, индуцированный подграф на каждой компоненте связности леса — это дерево. Таким образом, лес, как и положено, состоит из нескольких деревьев.

Лемма 1.2. 1) *В дереве с n вершинами ровно $n-1$ ребро.*

2) *У любого связного графа существует остовное дерево (то есть, остовный подграф, являющийся деревом).*

Доказательство. 1) Докажем утверждение индукцией по количеству вершин в дереве. База для дерева с одной вершиной очевидна. Рассмотрим дерево T с $n \geq 2$ вершинами. В графе, степени всех вершин которого не менее 2, есть цикл. Очевидно, у связного графа T на $n \geq 2$ вершинах не может быть вершин степени 0. Значит, у дерева T есть висячая вершина a. Понятно, что граф $T - a$ также связен и не имеет циклов, то есть, это дерево на $n - 1$ вершинах. По индукционному предположению мы имеем $e(T - a) = n - 2$, откуда очевидно следует, что $e(T) = n - 1$.

2) Если в графе есть цикл, то можно удалить из этого цикла ребро. Граф, очевидно, останется связным. Продолжим такие действия до тех пор, пока циклы не исчезнут. Понятно, что рано или поздно это произойдет, так как с каждым шагом уменьшается количество рёбер, а оно изначально конечно. В результате мы получим связный граф без циклов, являющийся остовным подграфом исходного графа, то есть, остовное дерево этого графа. □

Следствие 1.1. 1) *У дерева с более чем одной вершиной есть не менее двух висячих вершин.*

2) *У любого связного графа на n вершинах не менее, чем $n - 1$ ребро.*

Доказательство. 1) Если в дереве T не более одной висячей вершины, то остальные имеют степень хотя бы 2 и сумма степеней вершин не менее, чем $2v(T) - 1$. Однако, она же по пункту 1 леммы 1.2 равна $2e(G) = 2v(G) - 2$, противоречие.

2) Утверждение очевидно. □

Лемма 1.3. *Граф G является деревом тогда только тогда, когда для любых двух вершин существует единственный простой путь, соединяющий их.*

Доказательство. $\Leftarrow$ Предположим, что в графе G существует единственный простой путь между любыми двумя вершинами. Тогда граф очевидно связен. Если в графе есть цикл, то легко получить пртиворечие: между любыми двумя вершинами цикла существуют как минимум два простых пути. Значит, G — дерево.

$\Rightarrow$ Пусть G – дерево, тогда понятно, что между любыми двумя его вершинами есть путь. Пусть существует два разных простых ab-пути P_1 и P_2. Отрежем общие начала этих путей: предположим, что они начинаются в вершине c и их первые рёбра не совпадают. Пойдем по этим путям до их первого пересечения в вершине d (Понятно, что такая вершина есть, так как у путей общий конец b). Мы получили два простых cd-пути без общих внутренних вершин, которые, очевидно, образуют цикл. Противоречие. □

1.6 Вершинная и рёберная связность

Это самая важная часть введения — здесь содержатся основные определения, без которых трудно представить себе рассказ о связности.

Определение 1.14. Пусть $X, Y \subset V(G)$, $R \subset V(G) \cup E(G)$.

1) Назовем множество R *разделяющим*, если граф $G - R$ несвязен.

2) Пусть $X \not\subset R$, $Y \not\subset R$. Будем говорить, что R *разделяет* множества X и Y (или, что то же самое, *отделяет* множества X и Y друг от друга), если никакие две вершины $v_x \in X$ и $v_y \in Y$ не окажутся в одной компоненте связности графа $G - R$.

Через $\mathfrak{R}(G)$ обозначим набор, состоящий из всех разделяющих множеств графа G, которые могут содержать как вершины, так и рёбра графа. Через $\mathfrak{R}_k(G)$ обозначается набор, состоящий из всех k-вершинных разделяющих множеств k-связного графа.

Здесь и далее мы будем для $x \in V(G)$ отождествлять обозначения x и $\{x\}$. Соответственно, предыдущее определение переносится и на вершины графа G (как одновершинные множества).

Определение 1.15. 1) *Вершинная связность* $\kappa(G)$ — это минимальное количество вершин в разделяющем множестве $R \subset V(G)$ графа G.

2) Будем говорить, что граф G является *k-связным*, если $v(G) \geq k+1$ и $\kappa(G) \geq k$ (то есть, минимальное вершинное разделяющее множество в графе G содержит хотя бы k вершин).

Напомним, что здесь и далее мы будем для $x \in V(G)$ отождествлять обозначения x и $\{x\}$ — то есть, принеобходимости рассматривать вершину, как одновершинное множество. Соответственно, все данные для множеств определения переносятся и на вершины графа G (как одновершинные множества).

Определение 1.16. 1) Пусть $x, y \in V(G)$ — несмежные вершины. Обозначим через $\kappa_G(x, y)$ размер минимального множества $R \subset V(G)$ такого, что R разделяет x и y. Если x и y смежны, то положим $\kappa_G(x, y) = +\infty$. Назовем $\kappa_G(x, y)$ *связностью* вершин x и y.

2) Пусть $X, Y \subset V(G)$. Обозначим через $\kappa_G(X, Y)$ размер минимального множества $R \subset V(G)$ такого, что R разделяет X и Y. Если такого множества нет, то положим $\kappa_G(X, Y) = +\infty$.

Замечание 1.1. 1) Нетрудно понять, что вершинная связность удовлетворяет соотношению $\kappa(G) = \min_{x,y \in V(G)} \kappa_G(x, y)$.

2) Отметим, что в свете сказанного выше, пункт 1 последнего определения является частным случаем пункта 2.

3) Очевидно, в k-связном графе G для любых двух множеств вершин $X, Y \subset V(G)$ выполнено $\kappa_G(X,Y) \geq k$.

Определение 1.17. 1) *Рёберная связность* $\lambda(G)$ — это минимальное количество рёбер в разделяющем множестве $R \subset E(G)$ графа G.

2) Будем говорить, что граф G является *k-рёберно связным*, если $\lambda(G) \geq k$ (то есть, минимальное рёберное разделяющее множество в графе G содержит хотя бы k рёбер).

Определение 1.18. Пусть S — разделяющее множество графа G. Множество $A \subset V(G)$ назовем *частью S-разбиения*, если никакие две вершины из A нельзя разделить множеством S, но любая другая вершина графа G отделена от A множеством S.

Множество всех частей разбиения графа G разделяющим множеством S мы будем обозначать через $\mathrm{Part}(S)$. В случае, когда из контекста неочевидно, о каком графе идет речь, мы будем писать $\mathrm{Part}(G; S)$

Нетрудно понять, что часть $A \in \mathrm{Part}(S)$ есть объединение компоненты связности графа $G - S$ и самого множества S. Мы вводим это понятие потому, что с ним удобно работать. Далее мы обобщим это понятие и определим части разбиения графа набором разделяющих множеств. Здесь мы приводим определение части разбиения графа одним множеством потому, что с частями будет оперировать удобнее, чем с компонентами связности.

Замечание 1.2. 1) Пусть $H_1, \dots, H_m$ — компоненты связности графа $G - S$. Тогда $\mathrm{Part}(S) = \{H_1 \cup S, \dots, H_m \cup S\}$.

2) Пусть S — минимальное по включению разделяющее множество (то есть, любое его подмножество не разделяет граф). Тогда для любой компоненты связности H_i и любой вершины $x \in S$ существует вершина $y \in H_i$, смежная с x. Доказательство этого утверждение несложно и содержится в главе **Связность**.

3) Пусть S — минимальное по включению разделяющее множество, $\mathrm{Part}(S) = \{F_1, \dots, F_m\}$. Тогда из первых двух утверждений следует, что граф $G(F_i)$ связен для каждого $i \in [1..m]$.

1.7 Двудольные графы

Определение 1.19. 1) Раскраской вершин графа G в k цветов называется функция $\rho : V(G) \to [1..k]$. Раскраска ρ называется правильной, если $\rho(v) \neq \rho(u)$ для любой пары смежных вершин u и v.

2) Граф называется *двудольным*, если его вершины можно правильно покрасить в два цвета.

О правильных раскрасках вершин мы подробнее поговорим в соответствующей главе, сейчас же наш предмет изучения — двудольный граф. Часто бывает удобно, говоря от двудольном графе, разбивать его вершины на две *доли* — множества попарно несмежных вершин, имеющих в правильной двуцветной раскраске один и тот же цвет. Таким образом, двудольный граф G представим в виде $(V_1(G), V_2(G), E(G))$, где рёбра соединяют вершины из разных долей. Такое представление двудольного графа может быть не единственным.

Ниже мы сформулируем и докажем критерий двудольности графа.

Лемма 1.4. *Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.*

Доказательство. $\Rightarrow$. Очевидно, так как цикл нечетной длины невозможно правильным образом покрасить в два цвета.

$\Leftarrow$. Можно считать, что наш граф G связен, иначе рассмотрим вопрос отдельно для каждой компоненты связности. Выделим в связном графе G остовное дерево T. Легко понять, что вершины дерева T можно правильным образом покрасить в два цвета: выделим любую вершину a и покрасим в цвет 1 вершины на нечетном расстоянии от a, а в цвет 2 — саму a и вершины на четном расстоянии от a.

Докажем, что получилась правильная раскраска графа G. Пусть это не так, и нашлись две смежные вершины x и y одного цвета. Рассмотрим простые пути P_x и P_y от a до x и y соответственно. В дереве такие пути единственны и имеют одинаковую четность, то есть, в сумме дают четное число. Отрезав от P_x и P_y их общее начало (если такое есть) мы получим xy-путь четной длины, который, очевидно, не содержит ребра xy, при добавлении этого ребра образуется нечетный цикл. Противоречие. Таким образом, граф без нечетных циклов обязательно является двудольным. $\square$

1.8 Гиперграф

Книга эта — про графы. Но иногда нам будут нужны вспомогтательные гиперграфы, поэтому, придется их определить.

Для *гиперграфа* $\mathcal{H}$ мы будем применять для него такие же обозначения, как и для графа: множества *вершин* и *гиперребер* будем обозначать через $V(\mathcal{H})$ и $E(\mathcal{H})$ соответственно. Количество вершин и гиперрёбер мы будем обозначать через $v(\mathcal{H})$ и $e(\mathcal{H})$ соответственно. Главное отличие гиперграфа от обычного графа в том, что *гиперребро* — это произвольное подмножество $V(\mathcal{H})$, состоящее хотя бы из двух вершин. Поэтому удобно оперировать с гиперрёбрами как с множествами вершин графа.

Для вершины $v \in V(\mathcal{H})$ пусть $d_{\mathcal{H}}(v))$ — ее степень в гиперграфе $\mathcal{H}$, то есть, количество содержащих v гиперребер. Через $\Delta(\mathcal{H})$ и $\delta(\mathcal{H})$ обозначим *максимальную* и *минимальную* степени вершины гиперграфа $\mathcal{H}$, соответственно.

Для множества вершин $X \subset V(\mathcal{H})$ определим гиперграф $\mathcal{H} - X$ следующим образом: $V(\mathcal{H} - X) = V(\mathcal{H}) \setminus X$, а

$$E(\mathcal{H} - X) = \{R \setminus X\}_{R \in E(\mathcal{H})}.$$

Определение 1.20. 1) Будем называть последовательность различных вершин $a_1a_2 \dots a_k$ *путём*, если существуют гиперребра e_1, e_2, $\dots$, e_{k-1} такие, что $a_i, a_{i+1} \in e_i$.

2) Если, кроме того, существует гиперребро $e_k \ni a_k, a_1$, то мы назовем последовательность различных вершин $a_1a_2 \dots a_k$ *циклом*

Определение 1.21. 1) Гиперграф $\mathcal{H}$ называется *связным*, если любые две его вершины *связаны*, то есть, соединены путём.

2) *Компоненты связности* гиперграфа $\mathcal{H}$ определяются также, как и компоненты связности графа — это максимальные по включению множества попарно связанных вершин.

1.9 Изоморфизм графов

Как нам сделать вывод, что два по-разному заданных графа на самом деле — один и тот же граф?

Определение 1.22. Пусть G и G' — два графа, а отображение $\varphi : V(G) \to V(G')$ таково, что $xy \in E(G)$ если и только если $\varphi(x)\varphi(y) \in E(G')$. Тогда φ — изоморфизм графов G и G', а сами графы *изоморфны*.

В этой книге речь об изоморфизме графов будет идти крайне редко. В основном, мы будем говорить, что изоморфные графы равны друг другу, одинаковы, и.т.д. Это обусловлено тем, что с точки зрения комбинаторной теории графов изоморфные графы имеют одинаковые свойства, по сути такие графы — это разные способы записать один и тот же граф.

1.10 Рёберный граф

Определение 1.23. Для любого графа G определим рёберный граф G_E. Множество его вершин — это множество рёбер графа G (то есть,

$V(G_E) = E(G))$, а две вершины $e, f \in V(G_E)$ смежны тогда и только тогда, когда соответствующие рёбра графа G смежны, то есть, имеют общий конец.

Как связаны друг с другом связность графа G и рёберного графа G_E? Интуиция подсказывает, что вершинная связность графа G_E должна соответствовать рёберной связности графа G. Это почти что так, но нам потребуется немного более "рёберное" определение.

Определение 1.24. Назовём граф G *k-рёберно-циклически связным*, если никакое множество рёбер $F \subset E(G)$, $|F| \leq k-1$, не разделяет $E(G-F)$ (то есть, все рёбра графа $G-F$ соединяют вершины одной компоненты связности, а остальные компоненты связности этого графа — изолированные вершины).

Понтяно, что k-рёберно связный граф является и k-рёберно-циклически связным. Отметим непосредственное следствие данного определения.

Замечание 1.3. Граф G_E является k-связным если и только если граф G является k-рёберно-циклически связным.

Глава 2

Теорема Менгера

Теорема Менгера — безусловно, самое знаменитое утверждение о связности графов. Утверждение, без применения которого представить себе теорию связности невозможно. Поэтому мы докажем теорему Менгера и некоторые родственные ей факты именно здесь — в самом начале.

Мы приведем теорему Менгера в чуть более общей формулировке Гёринга (2000 г) и его доказательством.

Теорема 2.1. (K. Menger, 1927.) *Пусть $X, Y \subset V(G)$, $\kappa_G(X, Y) \geq k$, $|X| \geq k$, $|Y| \geq k$. Тогда в графе G существуют k непересекающихся XY-путей.*

Доказательство. (F. Göring, 2000.) Индукция по количеству вершин в графе. Доказывая утверждение для графа G и пары множеств X, Y мы будем считать утверждение уже доказанным для всех меньших графов. Рассмотрим два случая.

1. *Существует множество R из k вершин, разделяющее X и Y.* Тогда $X \setminus R \neq \varnothing$ и $Y \setminus R \neq \varnothing$. Отметим, что никакой XR-путь не содержит вершины из $Y \setminus R$ (иначе существовал бы XY-путь, не содержащий ни одной вершины множества R, см. рисунок 2.1a). Следовательно, любое множество S, отделяющее X от R в графе $G_x = G - (Y \setminus R)$, отделяет X от R и в графе G. Но тогда S отделяет X от Y в графе G, следовательно, $|S| \geq k$.

Таким образом, по индукционному предположению, существует k непересекающихся XR-путей в графе G_x, а следовательно, и в графе G. Аналогично, существует k непересекающихся RY-путей в графе G. Отметим, что никакой XR-путь не пересекает никакой RY-путь (иначе существовал бы XY-путь, не содержащий ни одной вершины множества R, см. рисунок 2.1b). Так как $|R| = k$, то мы можем состыковать XR-пути и

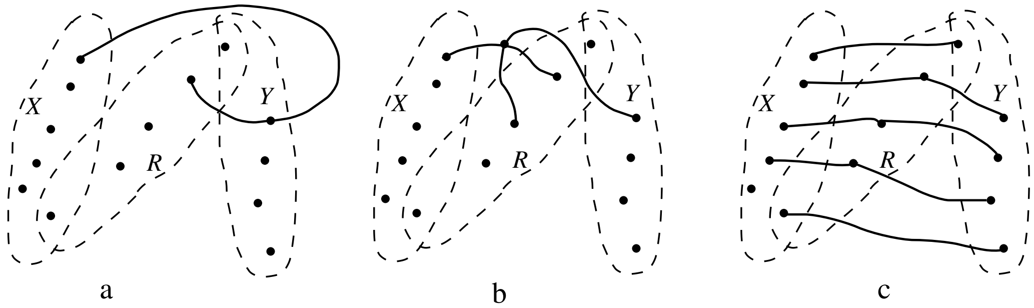


Рис. 2.1: XR, RY и XY-пути.

RY-пути по вершинам множества R, получив k непересекающихся XY-путей (см. рисунок 2.1c).

2. *Нет множества из k вершин, разделяющего X и Y.* Случай, когда в графе G нет рёбер, очевиден. Пусть $E(G) \neq \varnothing$. Тогда удалим из графа произвольное ребро xy. Если условие теоремы выполняется в меньшем графе $G-xy$, то по индукционному предположению выполняется утверждение теоремы для графа $G-xy$, а следовательно, и для графа G.

Остается рассмотреть случай, когда существует множество $T \subset V(G)$, $|T| \le k-1$, разделяющее X и Y в графе $G-xy$. Множества $X' = X \setminus T$ и $Y' = Y \setminus T$, очевидно, непусты. Как мы знаем, $T^* = T \cup \{xy\}$ разделяет X и Y в графе G, а $T_x = T \cup \{x\}$ — не разделяет (так как $|T_x| \le k$). Отсюда следует, что одно из множеств X' и Y' лежит в T_x. Тогда не умаляя общности можно считать, что $X' = \{x\}$. Аналогично, $Y' = \{y\}$.

Таким образом, $T \supset X \setminus \{x\}$ и $T \supset Y \setminus \{y\}$. Учитывая $|T| \le k-1$, $|X| \ge k$ и $|Y| \ge k$, мы получаем

$$X \setminus \{x\} = Y \setminus \{y\} = T \quad \text{и} \quad |T| = k-1.$$

В этом случае легко увидеть искомые пути — это ребро xy и $k-1$ вершина из $T = X \cap Y$. $\square$

Первый пункт следующего следствия и есть исходная формулировка теоремы Менгера, опубликованная им в 1927 году.

Следствие 2.1. 1) *Пусть вершины $x, y \in V(G)$ несмежны, $\kappa_G(x,y) \ge k$. Тогда существует k путей из x в y, не имеющих общих внутренних вершин.*

2) *Пусть $x \in V(G)$, $Y \subset V(G)$, $x \notin Y$, $k = \min(|Y|, \kappa_G(x,Y))$. Тогда существуют k непересекающихся путей от x до различных вершин множества Y.*

Доказательство. 1) Так как x и y несмежны, из $\varkappa_G(x,y) \geq k$ следует, что $|\mathrm{N}_G(x)| \geq k$, $|\mathrm{N}_G(y)| \geq k$ и любой простой xy-путь идёт из x в $x_1 \in \mathrm{N}_G(x)$, далее в $y_1 \in \mathrm{N}_G(y)$ и затем в y (возможно, вершины x_1 и y_1 совпадают). Тогда любое множество вершин R, отделяющее $\mathrm{N}_G(x)$ от $\mathrm{N}_G(y)$, отделяет вершину x от вершины y. Следовательно, $|R| \geq k$. Тогда по теореме 2.1 существует k непересекающихся $\mathrm{N}_G(x)\mathrm{N}_G(y)$-путей. Теперь легко найти и k непересекающихся по внутренним вершинам xy-путей.

2) Очевидно, $|\mathrm{N}_G(x)| \geq k$. Так как $x \notin Y$, любое множество вершин R, отделяющее $\mathrm{N}_G(x)$ от Y, отделяет вершину x от множества Y. Следовательно, $|R| \geq k$. Так как и $|Y| \geq k$, по теореме 2.1 существует k непересекающихся $\mathrm{N}_G(x)Y$-путей в графе G, а следовательно, и k непересекающихся путей от x до различных вершин множества Y. □

Теорема 2.2. (H. Whitney, 1932) *Пусть G — k-связный граф, $x, y \in V(G)$. Тогда существует k различных путей из x в y, не имеющих общих внутренних вершин.*

Доказательство. Индукция по k, база для $k = 1$ очевидна. Докажем утверждение для k-связного графа, считая, что оно доказано для графов меньшей связности.

Если вершины x и y несмежны, то утверждение следует из следствия 2.1. Пусть вершины x и y смежны. Если $\varkappa(G - xy) \geq k - 1$, то все в порядке — по индукционному предположению существует $k - 1$ не пересекающихся по внутренним вершинам xy-путей в графе $G - xy$, а еще один путь — это ребро xy.

Пусть в $G - xy$ существует разделяющее множество T, $|T| \leq k - 2$. Так как T не является разделяющим множеством в G, легко понять, что в графе $G - (T \cup \{xy\})$ ровно две компоненты связности: $U_x \ni x$ и $U_y \ni y$. Пусть $T_x = T \cup \{x\}$. Если $U_x \neq \{x\}$, то T_x отделяет $U_x \setminus \{x\}$ от U_y в G, что невозможно (так как $|T_x| \leq k - 1$). Тогда $U_x = \{x\}$. Аналогично, $U_y = \{y\}$. Таким образом, в графе G не более k вершин: это вершины множества T, x и y. Противоречие с определением k-связного графа. □

Все эти родственные факты обычно называют теоремой Менгера и ссылаются на них как на теорему Менгера. И мы будем в дальнейшем поступать так же.

Теорема 2.3. (G. A. Dirac.) *Пусть $k \geq 2$. В k-связном графе для любых k вершин существует простой цикл, содержащий все эти вершины.*

Доказательство. Докажем теорему индукцией по k. База для $k = 2$ — это тривиальное следствие теоремы Уитни (2.2).

Пусть $k > 2$. Рассмотрим k-связный граф G и его вершины $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k$. Так как G является $(k-1)$-связным графом, по индукционному предположению существует простой цикл Z, содержащий вершины $v_1, \ldots, v_{k-1}$. По пункту 2 следствия 2.1 существует $s = \min(v(Z), k)$ путей от v_k до цикла Z. Рассмотрим два случая.

1. $v(Z) < k$.
Тогда $V(Z) = \{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ и существуют непересекающиеся пути от v_k до всех вершин цикла Z. В этом случае легко вставить v_k в цикл Z между его соседними вершинами и получить искомый цикл.

2. $v(Z) \geq k$.
Тогда существует k непересекающихся путей от v_k до цикла Z. Пусть $x_1, \ldots, x_k \in V(Z)$ — концы этих путей в порядке их следования по циклу (нумерация — циклическая по модулю k). Они делят цикл на k дуг и внутренность одной из этих дуг (пусть это дуга L с концами x_i и x_{i+1}) не содержит ни одной из вершин $v_1, \ldots, v_{k-1}$. Тогда заменим дугу L на путь от x_i до V_k и путь от v_k до x_{i+1}, в результате получится искомый цикл. $\square$

Глава 3

Разделяющие множества в k-связном графе

В этом разделе граф G всегда будет k-связным, мы не будем об этом дополнительно упоминать в определениях и формулировках результатов. Эта глава — одна из самых важных в книге, хотя далеко не самая интересная. В ней вводится неклассическая терминология, которой оперируют дальнейшие формулировки и доказательства. Это язык последующей части книги. Большинство фактов, изложенных в главе, элементарны.

3.1 Части разбиения

Мы обобщим на набор из нескольких разделяющих множеств понятие части разбиения, определенное в предыдущей главе.

Определение 3.1. Пусть $\mathfrak{S}$ — набор из нескольких разделяющих множеств графа G (которые могут содержать как вершины, так и ребра графа G).

1) Множество $A \subset V(G)$ назовем *частью* $\mathfrak{S}$*-разбиения*, если никакие две вершины из A нельзя разделить никаким множеством из $\mathfrak{S}$, но любая другая вершина графа G отделена от множества A хотя бы одним из множеств набора $\mathfrak{S}$.

Множество всех частей разбиения графа G набором разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ мы будем обозначать через $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. В случае, когда неочевидно, какой граф разбивается, мы будем писать $\mathrm{Part}(G; \mathfrak{S})$.

2) Вершину части $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ назовем *внутренней*, если она не входит ни в одно из множеств набора $\mathfrak{S}$. Множество таких вершин назовем *внутренностью* части A и будем обозначать через $\mathrm{Int}(A)$.

Вершины, входящие в какие-либо множества из $\mathfrak{S}$, мы будем называть *граничными*, а все их множество — *границей* и обозначать через $\mathrm{Bound}(A)$.

Замечание 3.1. Отметим, что внутренняя вершина части $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ может быть концом ребра, входящего в множество $S \in \mathfrak{S}$.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}(G)$, $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, а граф G' получен из G удалением всех входящих в множества набора $\mathfrak{S}$ рёбер. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Вершина $x \in \mathrm{Int}(A)$ не смежна ни с одной из вершин множества $V(G) \setminus A$ в графе G'.*

2) *Если $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$, то $\mathrm{Bound}(A)$ отделяет $\mathrm{Int}(A)$ от $V(G) \setminus A$ в графе G'.*

Доказательство. 1) Пусть вершина $x \in \mathrm{Int}(A)$ смежна с вершиной $y \in V(G) \setminus A$. Существует множество $S \in \mathfrak{S}$, отделяющее y от $\mathrm{Int}(A)$ в G. Тогда $x, y \notin S$, причем вершины x и y смежны. Следовательно, $xy \in S$.

Таким образом, любое ребро, соединяющее $\mathrm{Int}(A)$ с $V(G) \setminus A$, принадлежит одному из множеств набора $\mathfrak{S}$, откуда немедленно следует доказываемое утверждение.

2) Утверждение пункта 2 непосредственно следует из пункта 1. □

Следствие 3.1. *Пусть $\mathfrak{S}$ — набор разделяющих множеств в графе G, содержащих только вершины, $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Тогда выполнены следующие утверждения, $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$. Тогда $\mathrm{Bound}(A)$ отделяет $\mathrm{Int}(A)$ от $V(G) \setminus A$ в графе G.*

Разделяющее множество $S \subset V(G)$ в k-связном графе G должно содержать не менее чем k вершин. Мы обозначим через $\mathfrak{R}_k(G)$ множество всех k-вершинных разделяющих множеств графа G и будем изучать свойства множеств из $\mathfrak{R}_k(G)$.

Замечание 3.2. Пусть $S \in \mathfrak{R}_k(G)$, $A \in \mathrm{Part}(S)$. Тогда $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$, а индуцированный подграф $G(\mathrm{Int}(A))$ связен.

Однако, если $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, то возможно, что $\mathrm{Int}(B) = \varnothing$. Кроме того, при $\mathrm{Int}(B) \neq \varnothing$ индуцированный подграф $G(\mathrm{Int}(B))$ не обязательно связен.

Одно и то же множество вершин A может быть частью разбиения графа G различными наборами k-вершинных разделяющих множеств. Мы покажем, что границу и внутренность части A можно определить независимо от набора множеств. Тем самым, понятие *части разбиения* приобретет самостоятельный смысл.

Лемма 3.1. *Пусть* $S \in \mathfrak{R}_k(G)$, $A \in \mathrm{Part}(S)$, $x \in S$. *Тогда существует вершина* $y \in \mathrm{Int}(A)$, *смежная с* x.

Доказательство. Предположим противное, пусть x не смежна ни с одной из вершин множества $\mathrm{Int}(A)$. Тогда множество $S' = S \setminus \{x\}$ отделяет непустое множество вершин $\mathrm{Int}(A)$ от непустого множества вершин $V(G) \setminus A$ (последнее непусто, так как является объединением всех отличных от $\mathrm{Int}(A)$ компонент связности графа $G - S$). Таким образом, граф $G - S'$ несвязен, и при этом $|S'| = k - 1$, что противоречит k-связности графа G. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть* G *— k-связный граф, а* $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$.

1) *Пусть* $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. *Тогда* $\mathrm{Bound}(A)$ *есть множество всех вершин части* A, *смежных хотя бы с одной вершиной из* $V(G) \setminus A$.

2) *Пусть* $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *и* $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$. *Тогда граница* A *как части* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *совпадает с границей* A *как части* $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$.

Доказательство. 1) Пусть $x \in \mathrm{Bound}(A)$. Существует такое множество $S \in \mathfrak{S}$, что $x \in S$. Множество вершин S не разделяет A, следовательно, A может пересекать внутренность не более чем одной части $\mathrm{Part}(S)$. Тогда существует такая часть $B \in \mathrm{Part}(S)$, что $\mathrm{Int}(B) \cap A = \varnothing$. По лемме 3.1 существует вершина $y \in \mathrm{Int}(B)$, смежная с x.

По следствию 3.1 ни одна из вершин множества $\mathrm{Int}(A)$ не может быть смежна с вершиной из $V(G) \setminus A$.

2) Пункт 1 дает определение границы части A, не зависящее от набора k-разделяющих множеств. $\square$

Задача 3.1. В n-связном графе G выбраны множества вершин $S_1, S_2, S_3 \in \mathfrak{R}_n(G)$. Известно, что $|\mathrm{Part}(S_1)| = |\mathrm{Part}(S_2)| = |\mathrm{Part}(S_3)| = 2$. Докажите, что в $\mathrm{Part}(\{S_1, S_2, S_3\})$ не более 6 частей с непустой внутренностью.

Определение 3.2. Пусть $S \in \mathfrak{R}_k(G)$, а H — компонента связности графа $G - S$. Мы будем называть H *фрагментом*. Множество S будем называть *границей* фрагмента H и обозначать через $\mathrm{Bound}(H)$.

Итак, пусть $H_1, \dots, H_m$ — все компоненты связности графа $G - S$. Нетрудно понять, что тогда

$$\mathrm{Part}(S) = \{H_1 \cup S, \dots, H_m \cup S\}, \quad \mathrm{Int}(H_i \cup S) = H_i, \quad \mathrm{Bound}(H_i \cup S) = S.$$

Таким образом, фрагменты — это внутренности частей разбиения графа G одним k-вершинным разделяющим множеством.

Покажем, что понятия фрагмента и его границы имеют самостоятельный смысл.

Лемма 3.2. *Пусть* H *— фрагмент в* k*-связном графе* G*. Тогда* $\mathrm{Bound}(H) = \mathrm{N}_G(H)$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Bound}(H) = S$. Тогда $H = \mathrm{Int}(A)$ для некоторой части $A \in \mathrm{Part}(S)$. По лемме 3.1, каждая вершина множества S смежна хотя бы с одной вершиной из H, то есть, $S \subset \mathrm{N}_G(H)$. Так как $S = \mathrm{Bound}(A)$ отделяет $H = \mathrm{Int}(A)$ от $V(G)\setminus$), мы имеем $S = \mathrm{N}_G(A)$. □

Следующая лемма покажет, что $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ — действительно разбиение графа на части.

Лемма 3.3. *Пусть* $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}(G)$*, а* $A, B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *— две различные части с непустым пересечением. Тогда существует такое множество* $S \in \mathfrak{S}$*, что* $A \cap B \subset S$.

Доказательство. Существует множество $S \in \mathfrak{S}$, отделяющее A от B. Легко понять, что $A \cap B \subset S$. □

Теорема 3.3. *Пусть* $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{R}(G)$*, а* $\mathfrak{S} = \cup_{i=1}^n \mathfrak{S}_i$*. Рассмотрим все множества вершин вида*

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i, \tag{3.1}$$

где $A_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}_i)$*. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Любая часть* $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *представляется в виде* (3.1).

2) *Из всех множеств вершин графа* G*, представимых в виде* (3.1)*, частями* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *являются в точности максимальные по включению.*

3) *Если множество вершин* A *представимо в виде* (3.1) *и* $A \notin \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$*, то* A *является подмножеством одного из множеств набора* $\mathfrak{S}$.

Доказательство. 1) Пусть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ни одно из множеств набора $\mathfrak{S}_i$ не разделяет A, следовательно, существует часть $A_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}_i)$, содержащая A. Пусть $A' = \cap_{i=1}^n A_i$. Включение $A \subset A'$ очевидно.

Понятно, что никакое множество набора $\mathfrak{S}$ не разделяет A', следовательно, существует такая часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, что $A' \subset B$. Таким образом, $A \subset A' \subset B$, откуда следует, что $A = A' = B$.

2) Пусть множество $A \subset V(G)$, представимое в виде (3.1) — максимальное по включению среди множеств такого вида. Тогда A невозможно разделить никаким множеством из набора $\mathfrak{S}$. Если $A \notin \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, то существует такая часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, что $B \supsetneq A$. Из пункта 1 следует противоречие с максимальностью A.

Пусть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Рассмотрим представление A в виде (3.1) и предположим, что A — не максимальное по включению среди множеств такого вида. Пусть $A \subset B$ и для B существует представление вида (3.1). Тогда B невозможно разделить никаким множеством из набора $\mathfrak{S}$, следовательно, A не является частью $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.

3) Пусть $A = \cap_{i=1}^{n} A_i$ (где $A_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}_i)$), причем $A \notin \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Тогда существует такая часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, что $B \supsetneq A$. Рассмотрим представление $B = \cap_{i=1}^{n} B_i$, где $B_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}_i)$. Так как $B \neq A$, то $A_j \neq B_j$ для какого-то j. Следовательно, $A \subset A_j \cap B_j$, а такое пересечение по лемме 3.3 обязательно является подмножеством одного из множеств набора $\mathfrak{S}_j$. $\square$

Лемма 3.4. *Пусть $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}(G)$, а часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ такова, что ни одно из множеств набора $\mathfrak{T}$ ее не разделяет. Тогда $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{T})$.*

Доказательство. Ни одно из множеств набора $\mathfrak{S} \cup \mathfrak{T}$ не разделяет A, поэтому существует такая часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{T})$, что $A \subset B$. Кроме того, очевидно существует содержащая B часть $A' \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Таким образом, $A \subset B \subset A'$, откуда очевидно следует, что $A = B = A'$. $\square$

3.2 Зависимые и независимые разделяющие множества

Определение 3.3. Назовем множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ *независимыми*, если S не разделяет T и T не разделяет S. В противном случае мы будем называть эти множества *зависимыми*.

К сожалению, разделяющие множества, состоящие из $k \geq 2$ вершин, могут быть зависимыми. Именно с этим связаны основные трудности в изучении k-связных графов при $k \geq 2$.

Лемма 3.5. *Пусть $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ и часть $A \in \mathrm{Part}(S)$ таковы, что $T \cap \mathrm{Int}(A) = \varnothing$. Тогда T не разделяет часть A и, следовательно, T не разделяет множество S.*

Доказательство. Как мы уже отмечали, граф $G(\mathrm{Int}(A))$ связен. Любая вершина $x \in S \setminus T$ смежна хотя бы с одной из вершин множества $\mathrm{Int}(A)$ по лемме 3.1. Следовательно, граф $G(\mathrm{Int}(A) \cup (S \setminus T))$ связен, откуда очевидно следует, что T не разделяет A и T не разделяет S. $\square$

Лемма 3.6. *Пусть $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ таковы, что множество S не разделяет множество T. Тогда множество T не разделяет множество S (то есть, эти множества независимы).*

Доказательство. Так как множество S не разделяет T, множество T может пересекать внутренность не более, чем одной из частей $\mathrm{Part}(S)$. Тогда существует такая часть $A \in \mathrm{Part}(S)$, что $\mathrm{Int}(A) \cap T = \varnothing$. По лемме 3.5, множество T не разделяет S. $\square$

Итак, мы установили, что возможен один из двух случаев: либо множества S и T разделяют друг друга (тогда они зависимы), либо множества S и T не разделяют друг друга (тогда они независимы).

Определение 3.4. Назовем *одиночными* множества из $\mathfrak{R}_k(G)$, не зависимые ни с какими множествами из $\mathfrak{R}_k(G)$. Остальные множества из $\mathfrak{R}_k(G)$ назовем *неодиночными.* Обозначим через $\mathfrak{O}(G)$ набор, состоящий из всех одиночных множеств графа G.

Одиночные множества играют важную роль в изучении структуры двусвязного и трёхсвязного графов.

Следствие 3.2. 1) *Пусть множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ таковы, что T не пересекается со внутренностью некоторой части $A \in \mathrm{Part}(S)$. Тогда S и T независимы, причем T не разделяет часть A.*

2) *Пусть множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ независимы, а часть $A \in \mathrm{Part}(S)$ содержит T. Тогда в $\mathrm{Part}(T)$ есть часть, содержащая все отличные от A части из $\mathrm{Part}(S)$, а все остальные части $\mathrm{Part}(T)$ являются подмножествами A.*

Доказательство. 1) Прямое следствие лемм 3.5 и 3.6.

2) Множество T не пересекает внутренностей отличных от A частей $\mathrm{Part}(S)$. По лемме 3.5 тогда множество S не разделяет никакой отличной от A части из $\mathrm{Part}(S)$. Поскольку $S \setminus T \neq \varnothing$, все эти части содержатся в одной части из $\mathrm{Part}(T)$. $\square$

Следствие 3.3. *Пусть H — фрагмент графа G, $T \in \mathfrak{R}_k(G)$, $T \cap H \neq \varnothing$, причем множество T независимо с границей фрагмента H. Тогда существует фрагмент $H' \subsetneq H$ с границей T.*

Доказательство. Пусть $S = \mathrm{Bound}(H)$, а часть $A \in \mathrm{Part}(S)$ такова, что $H = \mathrm{Int}(A)$. Из независимости S и T следует, что $T \subset A$. По части 2 следствия 3.2 существует часть $B \in \mathrm{Part}(T)$, лежащая в A. Из теоремы 3.2 понятно, что $\mathrm{Int}(B) \cap S = \varnothing$. Следовательно, $\mathrm{Int}(B) = B \setminus T \subsetneq \mathrm{Int}(A)$. $\square$

Изучим, как разбивает граф пара зависимых разделяющих множеств.

Лемма 3.7. *Пусть множества* $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ *зависимы,* $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, \dots, A_m\}$, $\mathrm{Part}(T) = \{B_1, \dots, B_n\}$. $P = T \cap S$, $T_i = T \cap \mathrm{Int}(A_i)$, $S_j = S \cap \mathrm{Int}(B_j)$, $G_{i,j} = A_i \cap B_j$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Все множества* $T_1, \dots, T_m$; $S_1, \dots, S_n$ *непусты.*

2) $\mathrm{Part}(\{S, T\}) = \{G_{i,j}\}_{i \in [1..m],\, j \in [1..n]}$, *причем* $\mathrm{Bound}(G_{i,j}) = P \cup T_i \cup S_j$.

Доказательство. 1) В силу леммы 3.5 и зависимости множеств S и T, $T_i = T \cap \mathrm{Int}(A_i) \neq \varnothing$ и $S_j = S \cap \mathrm{Int}(B_j) \neq \varnothing$.

2) В силу теоремы 3.3, части $\mathrm{Part}(\{S, T\})$ — это максимальные по включению среди множеств вида $G_{i,j}$, то есть, все такие множества: из пункта 1 следует, что $G_{\alpha,\beta} \not\subset G_{\gamma,\delta}$ при $(\alpha, \beta) \neq (\gamma, \delta)$. Утверждение $\mathrm{Bound}(G_{i,j}) = P \cup T_i \cup S_j$ очевидно. □

В следующей лемме мы используем обозначения из леммы 3.7.

Лемма 3.8. *Пусть множества* $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ *зависимы. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Пусть* $i \neq x$, $j \neq y$, $|\mathrm{Bound}(G_{i,j})| \geq k$ *и* $|\mathrm{Bound}(G_{x,y})| \geq k$. *Тогда*

$$\begin{matrix} |\mathrm{Bound}(G_{i,j})| = |\mathrm{Bound}(G_{x,y})| = k, \quad |\mathrm{Part}(S)| = |\mathrm{Part}(T)| = 2, \\ |T_i| = |S_y|, \quad |T_x| = |S_j| \end{matrix} .$$

2) *Если в* $\mathrm{Part}(\{S, T\})$ *нет малых частей, то в границе каждой части* $\mathrm{Part}(\{S, T\})$ *ровно* k *вершин,*

$$|\mathrm{Part}(S)| = |\mathrm{Part}(T)| = 2 \quad \textit{и} \quad |T_1| = |T_2| = |S_1| = |S_2|.$$

Доказательство. 1) Заметим, что

$$2k \leq |\mathrm{Bound}(G_{i,j})| + |\mathrm{Bound}(G_{x,y})| = \\ 2|P| + |T_i| + |T_x| + |S_j| + |S_y| \leq |S| + |T| = 2k.$$

Значит, оба неравенства обращаются в равенства, откуда следует, что $T = T_i \cup T_x \cup P$, $S = S_j \cup S_y \cup P$ (а по лемме 3.7 это означает, что $|\mathrm{Part}(S)| = |\mathrm{Part}(T)| = 2$, см. рисунок 3.1a) и $|\mathrm{Bound}(G_{i,j})| = |\mathrm{Bound}(G_{x,y})| = k$. Из

$$|T_i| + |S_j| + |P| = |\mathrm{Bound}(G_{i,j})| = k = |T| = |T_i| + |T_x| + |P|$$

следует, что $|S_j| = |T_x|$. Аналогично доказывается, что $|S_y| = |T_i|$.

2) Достаточно применить пункт 1 сначала к паре частей $G_{1,1}$ и $G_{2,2}$, а затем к паре частей $G_{1,2}$ и $G_{2,1}$. □

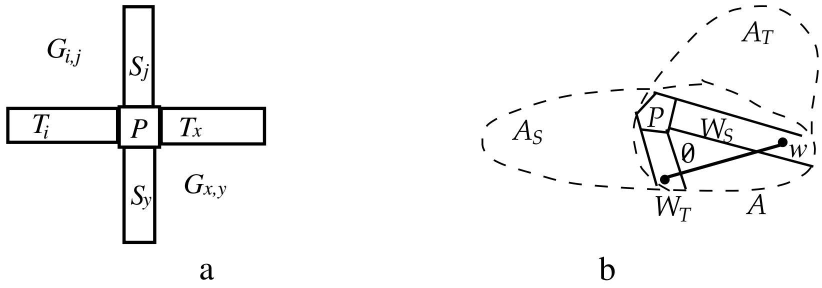


Рис. 3.1: Разбиение графа двумя зависимыми множествами.

Лемма 3.9. *Пусть множества* $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ *зависимы, а часть* $A \in \mathrm{Part}(\{S,T\})$ *пуста. Тогда существуют смежные вершины* $w \in A \setminus T$ *и* $w' \in A \setminus S$, *причем никакая отличная от* A *часть* $\mathrm{Part}(\{S,T\})$ *не содержит* $\{w, w'\}$.

Доказательство. По лемме 3.7 существует представление $A = A_S \cap A_T$, где $A_S \in \mathrm{Part}(S)$ и $A_T \in \mathrm{Part}(T)$, а $\mathrm{Bound}(A) = P \cup W_S \cup W_T$, где

$$P = S \cap T, \quad W_S = S \cap \mathrm{Int}(A_T) \subset S \setminus T \quad \text{и} \quad W_T = T \cap \mathrm{Int}(A_S) \subset T \setminus S,$$

причем $W_S \neq \varnothing$ и $W_T \neq \varnothing$ (см. рисунок 3.1b).

Рассмотрим вершину $w \in W_S \subset S \setminus T$. Эта вершина должна быть смежна хотя бы с одной вершиной из $\mathrm{Int}(A_S)$. Но W_S отделено множеством T от всех вершин из $\mathrm{Int}(A_S)$, кроме вершин множества W_T. Таким образом, существует вершина $w' \in W_T$, смежная с w.

По лемме 3.7 существует только одна часть, содержащая одновременно вершину из W_S и вершину из W_T — это часть A. □

3.3 Удаление вершины с сохранением k-связности

Очевидно, в любом связном графе H существует такая вершина v, что граф $H - v$ связен: достаточно в качестве v взять любую висячую вершину любого остовного дерева графа H. Для k-связного графа всё значительно сложнее: существуют k-связные графы, из которых невозможно удалить вершину с сохранением k-связности. Такие графы называются *критическими* k-связными графами. Простейшим примером критического двусвязного графа является простой цикл. Мы определим *нерасщепимые* k-связные графы и покажем, что из любого такого графа можно удалить вершину с сохранением k-связности.

Определение 3.5. Будем называть k-связный граф G *нерасщепимым*, если не существует множества $S \in \mathfrak{R}_k(G)$ и фрагмента H таких, что $H \subset S$.

Сначала покажем, что любой k-связный граф достаточно большой минимальной степени является нерасщепимым.

Лемма 3.10. *Пусть $\delta(G) \geq \frac{3k-1}{2}$. Тогда G — нерасщепимый.*

Доказательство. Предположим противное, пусть у графа G существует фрагмент, лежащий в множестве из $\mathfrak{R}_k(G)$. Рассмотрим среди всех таких фрагментов минимальный фрагмент H. Пусть $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ таковы, что $H \subset T$ и $S = \mathrm{Bound}(H)$. Рассмотрим вершину $x \in H$. Она может быть смежна только с вершинами из $A = H \cup S$. Так как $d_G(x) \geq \frac{3k-1}{2}$ и $|S| = k$, мы имеем $|H| \geq \frac{k-1}{2} + 1 = \frac{k+1}{2}$. Рассмотрим два случая.

1. *Множества S и T независимы.*
Тогда по следствию 3.3 существует фрагмент $H' \subsetneq H$, что противоречит минимальности H.

2. *Множества S и T зависимы.*
Пусть $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, \dots, A_m\}$, $\mathrm{Part}(T) = \{B_1, \dots, B_n\}$. Будем считать $H = \mathrm{Int}(A_1)$ и использовать обозначения из леммы 3.7. Тогда $T_1 = \mathrm{Int}(A_1)$, следовательно, $|T_1| \geq \frac{k+1}{2}$. Значит, для любого $i \in [2..m]$ мы имеем $|T_i| \leq \frac{k-1}{2}$. Не умаляя общности можно положить $|S_1| \geq |S_2|$, тогда $|S_2| \leq \frac{k}{2}$. Отметим, что

$$|T_1| + |S_1| + |P| + |T_i| + |S_2| + |P| \leq |T| + |S| = 2k,$$

следовательно, $|T_i| + |S_2| + |P| < k$.

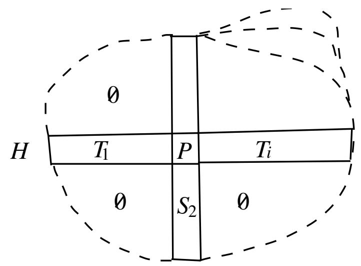


Рис. 3.2: Фрагменты H и H'.

Рассмотрим часть $G_{i,2} = A_i \cap B_2$. Предположим, что $\mathrm{Int}(G_{i,2}) \neq \varnothing$, тогда по теореме 3.2 состоящее менее чем из k вершин множество $\mathrm{Bound}(G_{i,2}) = T_i \cup S_2 \cup P$ отделяет от остальных вершин графа непустое множество $\mathrm{Int}(G_{i,2})$, что противоречит k-связности графа G. Следовательно, $\mathrm{Int}(G_{i,2}) = \varnothing$ для всех $i \in [2..m]$. Так как $A_1 \subset T$ а $G_{1,2} = A_1 \cap B_2$, то $\mathrm{Int}(G_{1,2}) = \varnothing$. Поскольку $B_2 = \cup_{i\in[1..m]} G_{i,2}$, то $\mathrm{Int}(B_2) = S_2 \subset S$. Таким образом, мы нашли фрагмент $H' = \mathrm{Int}(B_2)$, лежащий в множестве $S \in \mathfrak{R}_k(G)$, причем $|H'| \le \frac{k}{2}$. Выше доказано, что при $\delta(G) \ge \frac{3k-1}{2}$ такое невозможно. □

Условие нерасщепимости существенно упорядочивает структуру взаимного расположения k-вершинных разделяющих множеств в k-связном графе. В следующей лемме мы воспользуемся обозначениями из леммы 3.7.

Лемма 3.11. *Пусть G — нерасщепимый k-связный граф, а множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ зависимы. Тогда каждое из них делит граф на две части, причем можно их занумеровать так, что* $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2\}$, $\mathrm{Part}(T) = \{B_1, B_2\}$ *и* $|\mathrm{Bound}(G_{1,2})| = |\mathrm{Bound}(G_{2,1})| = k$.

Замечание 3.3. Отметим, что в этой нумерации $|T_1| = |S_1|$ и $|T_2| = |S_2|$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, \dots, A_m\}$, $\mathrm{Part}(T) = \{B_1, \dots, B_n\}$. Изобразим разбиение графа множествами S и T в виде таблицы $m \times n$, где клетка с координатами (i, j) соответствует части $G_{i,j} = A_i \cap B_j$: мы запишем в этой клетке количество вершин в $\mathrm{Int}(G_{i,j})$.

Предположим, что есть столбец (не умаляя общности, первый), в котором записаны только нули. Тогда

$$\mathrm{Int}(A_1) = \bigcup_{j\in[1..n]} G_{1,j} \setminus S \quad \subset \quad T,$$

что противоречит нерасщепимости графа.

Таким образом, в каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы один не ноль. Отсюда нетрудно сделать вывод, что существуют пары индексов (α, β) и (γ, δ) такие, что $\alpha \ne \gamma$, $\beta \ne \delta$, $\mathrm{Int}(G_{\alpha,\beta}) \ne \varnothing$ и $\mathrm{Int}(G_{\gamma,\delta}) \ne \varnothing$. Тогда $|\mathrm{Bound}(G_{\alpha,\beta})| \ge k$ и $|\mathrm{Bound}(G_{\gamma,\delta})| \ge k$. Теперь доказываемое утверждение следует из пункта 1 леммы 3.8, нужно лишь положить $\alpha = \delta = 1$ и $\beta = \gamma = 2$. □

Теорема 3.4. (Д. В. Карпов, А. В. Пастор, 2000.) *Пусть G — нерасщепимый k-связный граф, H — минимальный по включению фрагмент графа G. Тогда для любой вершины $x \in H$ граф $G - x$ является k-связным.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует такое множество $T \in \mathfrak{R}_k(G)$, что $T \cap H \ne \varnothing$. Пусть $S \in \mathfrak{R}_k(G)$ и $A_1 \in \mathrm{Part}(S)$

таковы, что $H = \mathrm{Int}(A_1)$. Если S и T независимы, то по следствию 3.3 существует фрагмент $H' \subsetneq H$, что противоречит минимальности H. Таким образом, S и T зависимы. Тогда по лемме 3.11 можно считать, что

$$\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2\}, \quad \mathrm{Part}(T) = \{B_1, B_2\},$$

$$|\mathrm{Bound}(G_{1,2})| = |\mathrm{Bound}(G_{2,1})| = k.$$

Если $\mathrm{Int}(G_{1,2}) \neq \varnothing$, то, так как $|\mathrm{Bound}(G_{1,2})| = k$, $\mathrm{Int}(G_{1,2}) \subsetneq H$ — фрагмент, что противоречит минимальности H. Следовательно, $\mathrm{Int}(G_{1,2}) = \varnothing$, откуда из нерасщепимости графа немедленно следует $\mathrm{Int}(G_{1,1}) \neq \varnothing$ и $\mathrm{Int}(G_{2,2}) \neq \varnothing$, а значит, в границах этих частей хотя бы по k вершин. По лемме 3.8 мы получаем, что $|\mathrm{Bound}(G_{1,1})| = |\mathrm{Bound}(G_{2,2})| = k$, следовательно, $\mathrm{Int}(G_{1,1})$ — фрагмент, причем $\mathrm{Int}(G_{1,1}) \subsetneq H$, что противоречит минимальности H. □

Непосредственно из леммы 3.10 и теоремы 3.4 можно вывести следствие.

Следствие 3.4. (G. Chartrand, A. Kaugars, D. R. Lick, 1972.) *Пусть G — k-связный граф, $\delta(G) \geq \frac{3k-1}{2}$. Тогда существует такая вершина $x \in V(G)$, что граф $G - x$ является k-связным.*

Именно это утверждение было первым результатом об удалении вершин с сохранением k-связности. Доказательство было гораздо более технически сложным, чем приведенное в этой книге.

3.4 Разрезы

Особо обратим внимание на *разрезы* — разделяющие множества, содержащие рёбра. Позже их свойства будут играть ключевую роль при описании минимальных k-связных графов.

Определение 3.6. Пусть G — k-связный граф.

1) Будем называть *разрезом* k-элементное разделяющее множество из вершин и рёбер графа G, содержащее хотя бы одно ребро. Множество всех разрезов графа G обозначим через $\mathfrak{T}(G)$.

2) Для разреза $T \in \mathfrak{T}(G)$ обозначим через $V(T)$ множество всех входящих в T вершин, а через $W(T)$ — множество, состоящее из всех вершин, входящих в разрез T и всех вершин, инцидентных рёбрам разреза T.

Замечание 3.4. 1) Никакая вершина разреза $T \in \mathfrak{T}(G)$ (то есть, из множества $V(T)$) не может быть инцидентна никакому ребру из T.

2) Для любого разреза $T \in \mathfrak{T}(G)$ граф $G - T$ имеет две компоненты связности, пусть это U_1 и U_2. Для каждого ребра $e \in T$ компоненты U_1 и U_2 содержат по одному концу e.

Теперь определим части разбиения графа разрезом и границы разреза.

Определение 3.7. 1) Пусть $T \in \mathfrak{T}(G)$, а U_1 и U_2 — компоненты связности графа $G-T$. Назовем множества $A_i = U_i \cup V(T)$ *частями разбиения* графа G разрезом T. Мы будем использовать обозначение

$$\mathrm{Part}(T) = \{A_1, A_2\}.$$

2) *Границами разреза* T мы будем называть множества вершин

$$\mathrm{R}(A_1) = A_1 \cap W(T) \quad \text{и} \quad \mathrm{R}(A_2) = A_2 \cap W(T).$$

Замечание 3.5. Пусть $T \in \mathfrak{T}(G)$, $\mathrm{Part}(T) = \{A_1, A_2\}$. Тогда выполняются следующие утверждения.

1) $A_1 \cup A_2 = V(G)$, $A_1 \cap A_2 = V(T)$.

2) Границы разреза T содержат по k элементов. Каждая из границ разреза T содержит $V(T)$ и по одному концу всех входящих в T рёбер.

3) Если множество $A' = A_1 \setminus W(T)$ непусто, то $\mathrm{R}(A_1)$ отделяет A' от $V(G) \setminus A_1$, а каждая вершина $x \in \mathrm{R}(A_1)$ смежна хотя бы с одной вершиной из A'. Таким образом, в этом случае граница разреза является k-вершинным разделяющим множеством в k-связном графе G (то есть, принадлежит $\mathfrak{R}_k(G)$).

3.4.1 Части разбиения графа множеством разрезов

Определим разбиение графа множеством из нескольких разрезов.

Определение 3.8. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(G)$.

1) Назовем *квазичастями* разбиения графа G множеством разрезов $\mathfrak{S}$ множества вида

$$A = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} A_S, \quad \text{где} \quad A_S \in \mathrm{Part}(S). \tag{3.2}$$

Будем обозначать множество всех квазичастей разбиения графа G множеством разрезов $\mathfrak{S}$ через $\mathrm{QPart}(G; \mathfrak{S})$.

2) *Границей* квазичасти A будет множество $\mathrm{Bound}(A)$ всех вершин этой квазичасти, являющихся вершинами разрезов из $\mathfrak{S}$.

3) *Внутренность* квазичасти A — это множество $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Bound}(A)$.

4) Определим *граничный разрез* $\mathrm{Cut}(A)$ квазичасти A: он состоит из множества вершин $\mathrm{Bound}(A)$ и всех рёбер, входящих в разрезы множества $\mathfrak{S}$ и инцидентных вершинам из $\mathrm{Int}(A)$.

Следствие 3.5. *Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(G)$. Тогда выполнены следующие утсервждения.*

1) *Части $P(\mathfrak{S})$ — это максимальные по включению квазичасти из* $\mathrm{QPart}(G;\mathfrak{S})$.

2) *Если $B \in \mathrm{QPart}(\mathfrak{S})$, $B \notin \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, то $B \subset V(S)$ для некоторого разреза $S \in \mathfrak{S}$.*

3) *Если $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2$, то части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ — это максимальные по включению множества вершин, представимые в виде $A = A_1 \cap A_2$, где $A_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}_i)$.*

4) *Если две различные квазичасти $A_1, A_2 \in \mathrm{QPart}(\mathfrak{S})$ имеют непустое пересечение, то $A_1 \cap A_2 \subset V(S)$ для некоторого разреза $S \in \mathfrak{S}$.*

Все эти утверждения непосредственно следуют из теоремы 3.3.

Замечание 3.6. Граничный разрез части не обязательно является разрезом. Для этого необходимо, чтобы $\mathrm{Cut}(A)$ содержал ровно k элементов и среди них было хотя бы одно ребро.

Лемма 3.12. *Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(G)$, $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, причем $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$ и $A \neq V(G)$. Обозначим через $\overline{A}$ объединение всех отличных от A частей $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $\mathrm{Cut}(A)$ *отделяет A от $\overline{A}$.*

2) $\overline{A} \setminus \mathrm{Bound}(A) = \overline{A} \setminus A =\supset V(G) \setminus A$.

3) *Если $|\mathrm{Cut}(A)| = k$ и $\mathrm{Cut}(A)$ содержит хотя бы одно ребро, то $\mathrm{Cut}(A)$ — разрез.*

4) $\mathrm{Part}(\mathrm{Cut}(A)) = \{A, A'\}$, *где $A' \supset \overline{A}$. Если $A' \setminus \overline{A} \neq \varnothing$, то это множество состоит из некоторых вершин $\mathrm{Bound}(A)$, инцидентных ребрам, входящим в разрезы из $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. 1) Отметим, что

$$A \cap \overline{A} \subset \mathrm{Bound}(A), \quad A \cup \overline{A} = V(G). \tag{3.3}$$

Любое ребро $e \in E(G)$, выходящее из $\mathrm{Int}(A)$ в $\overline{A} \setminus \mathrm{Bound}(A)$, соединяет две вершины, разделенные хотя бы одним из разрезов множества $\mathfrak{S}$, а значит, принадлежит одному из этих разрезов. Но тогда $e \in \mathrm{Cut}(A)$.

2) Так как $\overline{A} \cap \mathrm{Int}(A) = \varnothing$, мы имеем $\overline{A} \setminus \mathrm{Bound}(A) = \overline{A} \setminus A$. Так как $A \cup \overline{A} = V(G)$, мы имеем $V(G) \setminus A = \overline{A} \setminus A$.

3) Из пунктов 1 и 2 следует, что $\mathrm{Cut}(A)$ отделяет друг от друга непустые множества $\mathrm{Int}(A)$ и $V(G) \setminus A$. Теперь из условия ясно, что $\mathrm{Cut}(A)$ — разрез.

4) Очевидно, $A \in \mathrm{Part}(\mathrm{Cut}(A))$. По пункту 1 мы имеем $\overline{A} \subset A'$. Пусть $x \in A' \setminus \overline{A}$. Тогда $x \in \mathrm{Bound}(A)$ по пункту 2.

Вершина x смежна с $y \in V(G) \setminus A$ (иначе $\mathrm{Bound}(A) \setminus \{x\}$ отделяет $\mathrm{Int}(A)$ от $V(G) \setminus A$, что противоречит k-связности графа). Если ребро xy не входит в разрезы из $\mathfrak{S}$, то существует часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, содержащая x и y. Так как $B \neq A$, $x \in B \subset \overline{A}$, противоречие. $\square$

3.4.2 Независимые разрезы

Определение 3.9. Разрезы $S, T \in \mathfrak{T}_k(G)$ называются *независимыми*, если можно ввести такие обозначения

$$\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2\}, \quad \mathrm{Part}(T) = \{B_1, B_2\},$$

что $A_1 \supset B_2$ и $B_1 \supset A_2$. Иначе мы будем называть разрезы S и T *зависимыми*.

Лемма 3.13. *Пусть разрезы $S, R, T \in \mathfrak{T}(G)$ таковы, что S и R независимы, а также T и R независимы. Пусть*

$$\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2\}, \quad \mathrm{Part}(T) = \{B_1, B_2\}, \quad \mathrm{Part}(R) = \{D_1, D_2\},$$

причем $D_1 \supset A_1$ и $D_2 \supset B_2$. Тогда разрезы S и T независимы.

Доказательство. Из независимости разрезов S и R следует, что $A_2 \supset D_2 \supset B_2$. Из независимости разрезов T и R следует, что $B_1 \supset D_1 \supset A_1$. Таким образом, S и T независимы. $\square$

Лемма 3.14. *Пусть разрезы $S, T \in \mathfrak{T}(G)$ независимы,* $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2\}$, $\mathrm{Part}(T) = \{B_1, B_2\}$ *причем $A_1 \supset B_2$ и $B_1 \supset A_2$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $A_1 \supset \mathrm{R}(B_2)$, $\quad A_2 \not\supset \mathrm{R}(B_2)$.

2) *Если S и T не имеют общих рёбер, то $A_1 \supset W(T)$ и $A_2 \not\supset \mathrm{R}(B_1)$.*

Доказательство. 1) Очевидно, $A_1 \supset B_2 \supset \mathrm{R}(B_2)$. Предположим, что $A_2 \supset \mathrm{R}(B_2)$. Тогда

$$k - 1 \geq |V(S)| = |A_1 \cap A_2| \geq |\mathrm{R}(B_2)| = k,$$

что невозможно.

2) Пусть $b_1b_2 \in T$, $b_i \in \mathrm{Int}(B_i)$. Мы знаем, что $b_2 \in A_1$. Если $b_2 \in S$, то $b_2 \in A_2 \subset B_1$, что неверно. Значит, $b_2 \notin S$. Поскольку $b_1b_2 \notin S$, то вершины b_1 и b_2 не разделены разрезом S, то есть, $b_1 \in A_1$. Следовательно, $A_1 \supset W(T)$.

Предположим, что $A_2 \supset \mathrm{R}(B_1)$. Тогда

$$k - 1 \geq |V(S)| = |A_1 \cap A_2| \geq |\mathrm{R}(B_1)| = k,$$

что невозможно. □

Глава 4

Деревья разбиения

Начнем с описания классического примера — блоков и точек сочленения связного графа, а также дерева блоков и точек сочленения, которое показывает их взаимное расположение. В следующих разделах мы опишем несколько видов *деревьев разбиения* — это структуры, аналогичные дереву блоков и точек сочленения связного графа, но для более сложных объектов в графах большей связности: наборов, состоящих из попарно независимых k-вершинных разделяющих множеств или разрезов k-связного графа. Отдельно рассматривается дерево разбиения двусвязного графа.

4.1 Точки сочленения и блоки в связном графе

В этом разделе пусть G — связный граф.

Определение 4.1. Вершина $a \in V(G)$ называется *точкой сочленения*, если граф $G - a$ несвязен.

Блоком называется любой максимальный по включению двусвязный подграф графа G.

Замечание 4.1. Если у связного графа G хотя бы две вершины, то каждая его вершина смежна хотя бы с одной другой вершиной. Следовательно, любой блок графа G содержит хотя бы две вершины.

Лемма 4.1. *Пусть a, b — точки сочленения графа G, причем $U \in \mathrm{Part}(\{a\})$ — часть, содержащая b. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Вершина b — точка сочленения графа $G(U)$.*

2) *Любая точка сочленения графа $G(U)$ является точкой сочленения графа G.*

Доказательство. 1) Из определения ясно, что $U' = U \setminus \{b\}$ — компонента связности графа $G - a$. Следовательно, граф $G - U'$ связен и не содержит вершину b, поэтому множество $V(G) \setminus U$ содержится в одной компонент связности W графа $G - b$. Рассмотрим отличную от W компоненту связности W' графа $G - b$. Понятно, что $W' \subset U$ и $a \notin W'$, поэтому W' — одна из компонент связности графа $G(U) - b$, которую b отделяет в этом графе от вершины a. Следовательно, b — точка сочленения графа $G(U)$.

2) Наоборот, рассмотрим точку сочленения b' графа $G(U)$. Очевидно, $b' \neq a$. Вершина b' разбивает множество $G(U)$ на несколько компонент связности, из которых ровно одна содержит вершину a. Пусть W — одна из компонент связности графа $G(U) - b'$, не содержащих a. Так как вершины из $U \setminus \{a\}$ не смежны с вершинами из $V(G) \setminus U$, то b' отделяет W от a и в графе G, то есть, является точкой сочленения графа G. $\square$

Рассмотрим следующий процесс. Выберем точку сочленения $a \in \mathfrak{R}_1(G)$ и “разрежем” его по точке a, то есть, строго говоря, если $\mathrm{Part}(a) = \{B_1, \dots, B_k\}$, мы перейдем к рассмотрению связных графов $G(B_1)$,..., $G(B_k)$. Возьмем один из графов и выберем в нем точку сочленения, после чего перейдем к рассмотрению новых частей, и так далее, пока все полученные графы не окажутся двусвязными.

По лемме 4.1, мы вне зависимости от порядка действий проведем разрезы по всем точкам сочленения графа G и только по ним. В результате мы получим множества вершин всех блоков графа G. Это нетрудно доказать: получатся множества вершин графа G, индуцированные подграфы на которых двусвязны. Пусть B — одна из полученных в итоге частей, тогда любая вершина $c \notin B$ была “отрезана” от B на некотором шаге, следовательно, отделяется от B какой-то из точек сочленения. Значит, $G(B)$ — максимальный по включению двусвязный подграф графа G, то есть, блок.

Построим двудольный граф $B(G)$, вершины одной доли которого будут соответствовать всем точкам сочленения $a_1, \dots, a_n$ графа G, а другой — всем его блокам $B_1, \dots, B_n$ (мы будем обозначать эти вершины так же, как и блоки). Вершины a_i и B_j будут смежны, если $a_i \in B_j$. Граф $B(G)$ называется *деревом блоков и точек сочленения.*

Теорема 4.1. *Дерево блоков и точек сочленения — это действительно дерево, все висячие вершины которого соответствуют блокам.*

Доказательство. Связность $B(G)$ очевидно следует из связности графа G. Пусть a — точка сочленения, а блоки B_1 и B_2 связаны в графе $B(G) - a$. Тогда очевидно, что a не разделяет множество вершин

$V(B_1) \cup V(B_2)$. Таким образом, если висячая вершина графа $B(G) - a$ соответствует точке сочленения, эта точка сочленения не разделяет никакие две вершины графа G. Следовательно, все висячие вершины графа $B(G)$ соответствуют блокам графа G.

Предположим, в $B(G)$ есть простой цикл, тогда по доказанному выше все входящие в его блоки (а таких блоков хотя бы два!) вершины невозможно разделить ни одной из точек сочленения, то есть, все они должны входить в один блок, а не в несколько. Таким образом, $B(G)$ — дерево. □

Определение 4.2. Назовем блок B *крайним*, если он соответствует висячей вершине дерева блоков и точек сочленения.

Замечание 4.2. 1) Нетрудно понять, что блок графа G является крайним тогда и только тогда, когда он содержит ровно одну точку сочленения.

2) Если у связного графа G хотя бы две вершины, то каждый его крайний блок содержит вершину, не являющуюся точкой сочленения.

3) Если у связного графа G есть точки сочленения, то он имеет хотя бы два крайних блока. В этом случае крайние блоки содержат ровно по одной точке сочленения.

Посмотрим на блоки и точки сочленения с точки зрения языка разделяющих множеств и частей разбиения. Применив к связному графу G тяжелую артиллерию из уже доказанных фактов, можно рассмотреть набор $\mathfrak{R}_1(G)$ из всех точек сочленения графа G. Сильно упрощает ситуацию тот факт, что любые две точки сочленения независимы (поскольку разбить точку сочленения на две части невозможно).

Как было сказано выше, можно построить блоки, проводя последовательные разрезания графа по его точкам сочленения. Однако, даже при $k = 2$ построить аналогичную конструкцию методом последовательных разрезаний двусвязного графа по двухвершинным разделяющим множествам не получается, потому что более чем одновершинные разделяющие множества графа могут быть зависимы, то есть, могут разбивать друг друга на части.

Воспользовавшись нашей системой обозначений, можно сказать, что множества вершин блоков графа G — это части $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}_1(G))$. Такой подход гораздо лучше обобщается на графы большей связности и их минимальные разделяющие множества.

4.2 Дерево разбиения для набора попарно независимых множеств

В этом разделе граф G будет k-связным. Напомним, что через $\mathfrak{R}_k(G)$ обозначается набор, состоящий из всех k-вершинных разделяющих множеств k-связного графа. Подробнее все необходимые определения даны во введении.

Определение 4.3. Пусть G — k-связный граф, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, причем все множества набора $\mathfrak{S}$ попарно независимы. Построим *дерево разбиения* $T(G, \mathfrak{S})$ следующим образом. Вершины одной доли $T(G, \mathfrak{S})$ — это множества из $\mathfrak{S}$, а вершины другой доли — части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Обозначать вершины $T(G, \mathfrak{S})$ мы будем так же, как соответствующие множества вершин графа G. Вершины $S \in \mathfrak{S}$ и $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ смежны в $T(G, \mathfrak{S})$, если и только если $S \subset A$.

Далее мы докажем, что определенный таким образом граф действительно является деревом. Построение $T(G, \mathfrak{S})$ аналогично построению дерева блоков и точек сочленения. Аналогичными будут и его свойства. Начнем со вспомогательного определения и технической леммы.

Определение 4.4. Построим граф $G^{\mathfrak{S}}$ на множестве вершин $V(G)$ следующим образом: возьмем граф G и для каждого множества $S \in \mathfrak{S}$ добавим все отсутствующие в $E(G)$ рёбра, соединяющие пары несмежных в G вершин множества S.

Отметим несколько свойств графа $G^{\mathfrak{S}}$.

Лемма 4.2. *Пусть G — k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ — набор, состоящий из попарно независимых множеств. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G^{\mathfrak{S}})$. *Более того,* $\mathrm{Part}(G; \mathfrak{S}) = \mathrm{Part}(G^{\mathfrak{S}}; \mathfrak{S})$.

2) *Пусть $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, $B \in \mathrm{Part}(G; \mathfrak{T})$, а множество $R \in \mathfrak{R}(G^{\mathfrak{S}}(B))$ не содержит рёбра, соединяющие пары вершин, входящих в какое-либо множество набора $\mathfrak{S}$. Тогда $R \in \mathfrak{R}(G)$. В частности, граф $G^{\mathfrak{S}}(B)$ является k-связным.*

Доказательство. 1) Рассмотрим любое множество $S \in \mathfrak{S}$. Так как множества набора $\mathfrak{S}$ попарно независимы, никакое ребро из $E(G^{\mathfrak{S}}) \setminus E(G)$ не может соединять внутренние вершины двух разных частей $\mathrm{Part}(G; S)$. Таким образом, вершины разделены одним из множеств набора $\mathfrak{S}$ в графе G если и только если они разделены этим множеством в $G^{\mathfrak{S}}$, откуда очевидно следуют утверждения пункта 1.

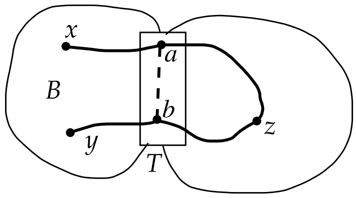


Рис. 4.1: Построение пути в графе $G^{\mathfrak{S}}(B)$.

2) Предположим, что $R \notin \mathfrak{R}(G)$. Пусть $x, y \in B$, а множество R отделяет x от y в графе $G^{\mathfrak{S}}(B)$. Однако, R не отделяет x от y в графе G, а следовательно, и в $G^{\mathfrak{S}}$. Рассмотрим кратчайший xy-путь P в графе $G^{\mathfrak{S}} - R$. Предположим, что он содержит вершину $z \notin B$ (см. рисунок 4.1). Тогда существует множество $T \in \mathfrak{T}$, отделяющее z от B. При движении от z в обе стороны по пути P мы попадем в различные вершины a и b множества T, которые в $G^{\mathfrak{S}}$ смежны. По условию, $ab \notin R$. Но тогда существует более короткий путь: можно заменить участок пути, содержащий z, на ребро ab. Противоречие с выбором пути P показывает, что $V(P) \subset B$, а значит, P — путь в $G^{\mathfrak{S}}(B) - R$. Но такого пути нет по условию. Следовательно, $R \in \mathfrak{R}(G)$.

В завершении доказательства остается отметить, что $\mathfrak{R}_{k-1}(G) = \varnothing$ (граф G — k-связный), а значит и $\mathfrak{R}_{k-1}(G^{\mathfrak{S}}(B)) = \varnothing$, то есть, граф $G^{\mathfrak{S}}(B)$ также является k-связным. $\square$

Теорема 4.2. *Пусть G — k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ — набор, состоящий из попарно независимых множеств. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *$T(G, \mathfrak{S})$ — это дерево.*

2) *Для каждого множества $S \in \mathfrak{S}$ выполняется равенство*

$$d_{T(G,\mathfrak{S})}(S) = |\mathrm{Part}(S)|.$$

Более того, для каждой части $A \in \mathrm{Part}(S)$ существует единственная такая часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, что $B \subset A$ и B смежна с S в $T(G, \mathfrak{S})$. Все висячие вершины дерева $T(G, \mathfrak{S})$ соответствуют частям $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.

3) *Множество S разделяет в графе G части $B, B' \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ тогда и только тогда, когда S разделяет B и B' в $T(G, \mathfrak{S})$.*

Доказательство. Будем доказывать все утверждения теоремы индукцией по количеству множеств в наборе $\mathfrak{S}$, причем не фиксируя k-связный граф G. *База* для пустого набора очевидна.

Докажем *индукционный переход*. Рассмотрим граф $G^* = G^{\mathfrak{S}}$. Из леммы 4.2 следует, что разбиения графов G и G^* набором $\mathfrak{S}$ одинаковы, будем обозначать это разбиение через $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Более того, тогда

$$T(G, \mathfrak{S}) = T(G^*, \mathfrak{S}).$$

Поэтому достаточно доказать утверждения теоремы для графа G^*. Пусть

$$S \in \mathfrak{S}, \quad \mathrm{Part}(S) = \{A_1, \ldots, A_n\}, \quad G_i = G^*(A_i).$$

По лемме 4.2, все графы G_1, …, G_n являются k-связными. Пусть набор $\mathfrak{S}_i$ состоит из всех множеств набора $\mathfrak{S}$, лежащих в A_i и отличных от S. Тогда каждое множество из $\mathfrak{S} \setminus \{S\}$ лежит ровно в одном из наборов $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n$.

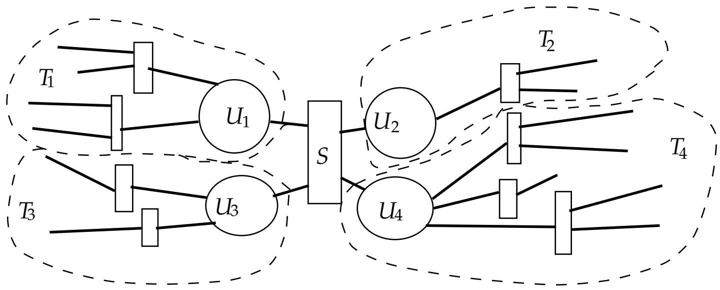


Рис. 4.2: Дерево $T(G, \mathfrak{S})$.

Пусть $U_i \in \mathrm{Part}(G_i; \mathfrak{S}_i)$ — часть, содержащая S. По лемме 4.2, для любой части $U \in \mathrm{Part}(G_i; \mathfrak{S}_i)$ граф $G^*(U)$ является k-связным, а значит, его не разделяет ни одно из множеств набора $\mathfrak{S}$, не лежащих в U. Множество S лежит в части U_i, но также не разделяет ее, так как

$$U_i \subset A_i \in \mathrm{Part}(G; S).$$

Это означает, что $\mathrm{Part}(G_i; \mathfrak{S}_i) \subset \mathrm{Part}(G^*; \mathfrak{S})$, причем именно часть U_i содержит S. Следовательно,

$$\mathrm{Part}(G^*; \mathfrak{S}) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Part}(G_i; \mathfrak{S}_i),$$

причем объединение — дизъюнктное, а части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, содержащие множество S — это $U_1, \ldots, U_n$. Таким образом, утверждение 2 и 3 теоремы доказано для множества S, для остальных множеств из $\mathfrak{S}$ доказательство аналогично.

Каждая часть $\mathrm{Part}(G_i; \mathfrak{S}_i)$, кроме U_i, смежна в $T_i = T(G_i, \mathfrak{S}_i)$ с теми же вершинами, что в $T(G, \mathfrak{S})$. Для части U_i в $T(G, \mathfrak{S})$ добавляется ребро к множеству S. Поэтому $T(G,\mathfrak{S})-S$ распадается ровно на n связных подграфов: это графы T_i, где $i \in \{1,\dots,n\}$ (см. рисунок 4.2). По индукционному предположению, все эти графы — деревья, а значит, выполнены утверждения пунктов 1 и 3 теоремы. $\square$

Как мы видим, свойства дерева разбиения аналогичны хорошо известным нам свойствам классического дерева блоков и точек сочленения.

4.3 Дерево разрезов

Определение 4.5. 1) Пусть $\mathfrak{S}$ — множество, состоящее из попарно независимых разрезов графа G. *Дерево разрезов* множества $\mathfrak{S}$ — это двудольный граф $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$: одну долю образуют разрезы из $\mathfrak{S}$, а вторую — части из $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, причем множество $S \in \mathfrak{S}$ и часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ смежны тогда и только тогда, когда A содержит одну из границ разреза S.

2) Если часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ соответствует висячей вершине дерева $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$, то назовем такую часть *крайней.*

Теорема 4.3. *Пусть G — k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(G)$ — набор из попарно независимых разрезов, причем в $\mathfrak{S}$ нет двух разрезов, содержащих одно и то же ребро. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Граф $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$ — дерево.*

2) *Любой разрез $S \in \mathfrak{S}$ смежен в $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$ ровно с двумя частями $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, причем эти две части содержатся в разных частях $\mathrm{Part}(S)$.*

3) *Разрез $S \in \mathfrak{S}$ отделяет вершину B от вершины C в $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$ если и только если S отделяет множество B от множества C в графе G.*

4) *Если крайняя часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ смежна в $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$ с разрезом T, то $A \in \mathrm{Part}(T)$.*

5) *Крайние части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ — это в точности минимальные по включению части среди всех частей разбиения графа G одним разрезом из множества $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. Индукция по количеству разрезов. *База*: при $|\mathfrak{S}|=1$ все пять утверждений очевидны.

Индукционный переход. Пусть для любого меньшего чем $\mathfrak{S}$ множества разрезов утверждение уже доказано. Выберем разрез $T \in \mathfrak{S}$ так, что одна из частей $B \in \mathrm{Part}(T)$ — минимальная по включению среди всех частей разбиения графа G одним разрезом из $\mathfrak{S}$. Пусть $\mathfrak{S}'=\mathfrak{S}\setminus\{T\}$. Тогда граф $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S}')$ — дерево. Пусть $\mathrm{Part}(T)=\{B,B'\}$.

Рассмотрим разрез $S \in \mathfrak{S}'$. Так как S и T независимы и в силу минимальности части $B \in \mathrm{Part}(T)$, существует такая часть $A_S \in \mathrm{Part}(S)$, что $B \subset A_S$. Пусть $\mathrm{Part}(S) = \{A_S, A'_S\}$. Тогда $B' \supset A'_S$. По лемме 3.14 мы имеем $A'_S \not\supset \mathbb{R}(B)$.

Введем описанные выше обозначения для всех разрезов $S \in \mathfrak{S}'$ и рассмотрим квазичасть

$$A = \bigcap_{S\in\mathfrak{S}'} A_S \quad \in \quad \mathrm{QPart}(\mathfrak{S}').$$

Любая отличная от A часть $A' \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ лежит в A'_S для некоторого разреза $S \in \mathfrak{S}'$ и потому $A' \not\supset \mathbb{R}(B)$. Отсюда следует, что $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$.

Вспомним, что по лемме **??** части $D \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ — это максимальные по включению множества вида

$$D = H \cap F, \quad \text{где} \quad H \in \mathrm{Part}(T) \quad \text{и} \quad F = \bigcap_{S\in\mathfrak{S}'} F_S \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}'). \qquad (4.1)$$

Разберем несколько случаев.

a. Пусть $F \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$, $F \neq A$.
Тогда для некоторого $S \in \mathfrak{S}'$ мы имеем $F_S \neq A_S$ и поэтому $F_S = A'_S$. Следовательно, $B' \supset A'_S \supset F$. Поэтому $B \cap F \subsetneq F = B' \cap F$. Следовательно, все максимальные по включению множества вида (4.1), где $F \neq A$ — это части $F \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ и только они. Таким образом, все отличные от A части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ — это части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.

Отметим, что по лемме 3.14 часть $F_S = A'_S$ не содержит ни одно из множеств $\mathbb{R}(B)$ и $\mathbb{R}(B')$, следовательно, F не смежна в $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ с разрезом T. Таким образом, $\mathrm{N}_{\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})}(F) = \mathrm{N}_{\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S}')}(F)$.

b. $D = H \cap A$.
Если $H = B$, то $D = A \cap B = B$. Легко понять, что B — максимальное по включению множество вида (4.1), а значит, $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. По лемме 3.14, часть B не содержит никаких границ разрезов множества $\mathfrak{S}'$, следовательно, B — висячая вершина дерева $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$, смежная только с разрезом T.

Остается последний случай $D = A \cap B'$. Как мы знаем по лемме 3.14, часть B' содержит все границы разрезов из $\mathfrak{S}'$, которые лежат в A. Кроме того, для всех $S \in \mathfrak{S}'$ по лемме 3.14 мы имеем $A_S \supset \mathbb{R}(B')$, а значит, $A \supset \mathbb{R}(B')$. Следовательно, $D = A \cap B'$ содержит $\mathbb{R}(B')$ и все границы разрезов из $\mathfrak{S}'$, лежащие в A, а других границ разрезов из $\mathfrak{S}$ не содержит. Это означает, что $\mathrm{N}_{\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})}(D) = \mathrm{N}_{\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S}')}(A) \cup \{T\}$.

Таким образом, граф $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ получается из $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S}')$ переименованием вершины A в D, присоединением к D разреза T, а к T — части B (см. рисунок 4.3).

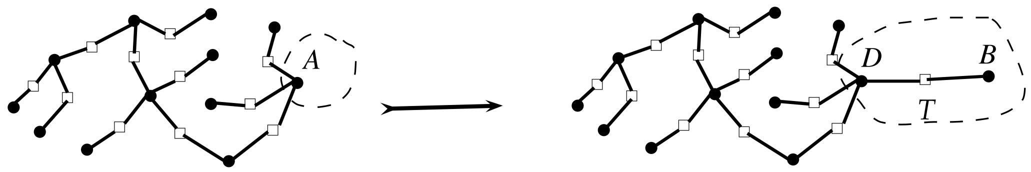


Рис. 4.3: Индукционный шаг построения дерева $T(G,\mathfrak{S})$.

1) и 2) Из сказанного выше ясно, что $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$ — дерево. Отметим, что разрез T смежен в этом дереве с двумя частями, содержащими его границы — это B и $D \subset B'$, и других таких частей нет. Теперь понятно, что для дерева $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$ выполнено утверждение 2.

3) Мы доказали, что часть $B' \in \mathrm{Part}(T)$ содержит все отличные от B части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, а также для каждого разреза $S \in \mathfrak{S}$ часть B' содержит часть $A'_S \in \mathrm{Part}(S)$. Это означает, что разрез T отделяет крайнюю часть B от всех остальных частей и разрезов как в $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$, так и в графе G. Более того, T не отделяет друг от друга в графе G никакие отличные от B части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ и разрезы из $\mathfrak{S}'$, так как все эти части и разрезы лежат в части $B' \in \mathrm{Part}(T)$.

Рассмотрим любой разрез $S \in \mathfrak{S}'$, напомним, что $\mathrm{Part}(S) = \{A_S, A'_S\}$, причем $A_S \supset B$. В графе G разрез S отделяет части и разрезы, содержащиеся в A_S от частей и разрезов, содержащихся в A'_S. Нам нужно доказать, что то же самое верно и для дерева $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$. Из индукционного предположения для дерева $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S}')$ следует, что это утверждение верно для разрезов из $\mathfrak{S}'$ и частей $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, являющихся частями $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ — а по доказанному выше это все части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, кроме B и $D = A \cap B'$. Разрез S не отделяет в дереве $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S}')$ часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ от остальных частей и разрезов, лежащих в A_S. Отметим, что $A_S \supset A = D \cap B$. По пункту 2 леммы 3.14 мы имеем $A_S \supset T$. Из построения $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$ и сказанного выше следует доказываемое утверждение.

4) Для крайней части B утверждение выполнено. Любая другая крайняя часть $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ соответствует висячей вершине дерева $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S}')$, а значит, для нее существует такой разрез $T' \in \mathfrak{S}'$, что H смежна с T' и в $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S}')$, и в в $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$. По индукционному предположению $H \in \mathrm{Part}(T')$. 5) Предположим, что $|\mathfrak{S}| > 1$, иначе утверждение очевидно. Вспомним, что $\mathrm{Part}(T) = \{B, B'\}$, причем крайняя часть B была выбрана как минимальная по включению среди всех частей разбиения графа G одним разрезом из множества $\mathfrak{S}$, а часть B' при $|\mathfrak{S}| > 1$ таковой не является.

По индукционному предположению крайние части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ — это в точности минимальные по включению среди всех частей разбиения графа G одним разрезом из множества $\mathfrak{S}'$. Рассмотрим такую часть H. Если $H \neq A$, то $H \subset B' \in \mathrm{Part}(T)$, поэтому, часть H является минимальной по включению среди всех частей разбиения графа G одним разрезом из множества $\mathfrak{S}$. Остается лишь отметить, что часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ не является минимальной по включению среди частей разбиения графа G одним разрезом множества $\mathfrak{S}$ (напомним, что $A \supset B$) и не является крайней частью $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. $\square$

Определение 4.6. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество, состоящее из попарно независимых разрезов графа G. Мы построим граф $\mathrm{PT}(G, \mathfrak{S})$ следующим образом: вершины этого графа — это части из $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, причем две части $A, B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ смежны тогда и только тогда, когда содержат границы одного и того же разреза из $\mathfrak{S}$.

Следствие 4.1. *Пусть G — k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(G)$ — набор из попарно независимых разрезов, причем в $\mathfrak{S}$ нет двух разрезов, содержащих одно и то же ребро. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Граф* $\mathrm{PT}(G, \mathfrak{S})$ *— дерево.*

2) *Поставим в соответствие каждому ребру AB дерева* $\mathrm{PT}(G, \mathfrak{S})$ *разрез из $\mathfrak{S}$, границы которого содержатся в частях A и B. Тогда это отображение — взаимно однозначное соответствие между рёбрами дерева* $\mathrm{PT}(G, \mathfrak{S})$ *и разрезами из $\mathfrak{S}$.*

3) $|\mathrm{Part}(\mathfrak{S})| = |\mathfrak{S}| + 1$.

4) *Пусть R — граница одного из разрезов набора $\mathfrak{S}$. Тогда существует ровно одна часть* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$*, содержащая R.*

5) *Если части $A, B \in$* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *смежны в дереве* $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ *с одним разрезом S, то $A \cap B = V(S)$.*

6) *Если части $A, B \in$* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *смежны в дереве* $\mathrm{PT}(G, \mathfrak{S})$*, то*

$$|A \cap B| \leq k - 1.$$

Доказательство. 1) и 2) По теореме 4.3 граф $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ — дерево, причем все его вершины, соответствующие разрезам, имеют в $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ степень 2. Из пункта 2 теоремы 4.3 понятно, что заменив в этом дереве каждый разрез $S \in \mathfrak{S}$ на ребро, соединяющие две смежные с ним в $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, мы получим дерево $\mathrm{PT}(G, \mathfrak{S})$, причем для этого дерева выполняется утверждение 2.

3) Непосредственное следствие утверждения 2.

4) Непосредственное следствие утверждения 2 теоремы 4.3.

5) По теореме 4.3 части A и B содержат разные границы разреза S, поэтому $A \cap B \supset V(S)$. Разрез S отделяет часть A от части B, поэтому $V(S) \supset A \cap B$.

6) По определению и пункту 2 теоремы 4.3, части A и B смежны в дереве $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ с одним разрезом S. Таким образом, пункт 6 следует из пункта 5. $\square$

4.4 Гипердерево разбиения

В этом разделе главе мы докажем *теорему о разбиении* — абстрактное утверждение о структуре, обобщающей свойства множества точек сочленения связного графа.

4.4.1 Гипердерево

Начнем с определения гипердерева и изучения его свойств.

Определение 4.7. Пусть H — гиперграф.

1) Будем называть гиперграф H *гипердеревом*, если он связен, ни одно его гиперребро не является подмножеством другого и для любого цикла в этом гиперграфе существует гиперребро, содержащее все его вершины.

2) Назовем вершину v гипердерева H *крайней*, если гиперграф $H - v$ связен.

3) По гиперграфу H построим двудольный граф $T(H)$, вершины одной доли которого — вершины H, а вершины другой доли — гиперребра H. Каждое гиперребро R соединим со всеми вершинами, которые оно содержит.

Гипердерево имеет множество свойств, аналогичных свойствам обычного дерева.

Теорема 4.4. *Пусть H — гипердерево, $v(H) \geq 2$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Граф $T(H)$ — дерево.*

2) *Никакие два гиперребра H не имеют двух общих вершин.*

3) *Пусть $a \in V(H)$. Тогда $d_H(a)$ равняется количеству компонент связности гиперграфа $H - a$. Более того, для любой компоненты связности W гиперграфа $H - a$ существует единственное гиперребро $R \in E(H)$, содержащее a и вершины из W. Это гиперребро не содержит вершин других компонент связности гиперграфа $H - a$.*

4) *Крайние вершины гипердерева H — это в точности все его вершины, имеющие степень* 1.

5) *Множество висячих вершин дерева $T(H)$ совпадает с множеством крайних вершин гипердерева H.*

6) *Пусть R — гиперребро H, $b \in V(H) \setminus R$. Тогда существует единственная такая вершина $a \in R$, что a отделяет b от R в H.*

Доказательство. 1) Связность $T(H)$ очевидна. Предположим, что в графе $T(H)$ есть простой цикл $a_1 R_1 a_2 \dots a_n R_n$, где $a_1, \dots, a_n \in V(H)$, а $R_1, \dots, R_n \in E(H)$. Тогда $R_i \ni a_i, a_{i+1}$ (мы считаем, что $n+1=1$). Положим

$$R'_k = R_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} R_i \cup \{a_1, \dots, a_n\} \right).$$

Выпишем вершины в таком порядке: сначала a_1, затем все вершины из R'_1, затем a_2, затем все вершины из R'_2, $\dots$, затем a_n и, наконец, все вершины из R'_n. Мы получили цикл в гипердереве H, содержащий все вершины гиперребер $R_1, \dots, R_n$, а значит, существует гиперребро R, содержащее все вершины этого цикла. Но тогда $R \supsetneq R_1$, что невозможно.

2) Если оба гиперребра E_1 и E_2 содержат вершины a и b, то в графе $T(H)$ есть цикл, что противоречит пункту 1.

3) Так как H — связный гиперграф, то существует его гиперребро, содержащее a и несколько вершин из W. Это гиперребро не может содержать вершины, отличные от a и не входящие в W (иначе W не была бы компонентой связности гиперграфа $H - a$).

Пусть существует два таких гиперребра E_1 и E_2. Тогда $E_1 \cap E_2 = \{a\}$ по пункту 2. Рассмотрим вершины $b_1 \in E_1 \setminus \{a\}$ и $b_2 \in E_2 \setminus \{a\}$. Так как $b_1, b_2 \in W$, существует такой простой путь P от b_1 до b_2, что все его гиперребра содержат только вершины из W. Значит, в $T(H)$ существует не проходящий через a путь от b_1 до b_2. Добавив к этому пути гиперребро E_2, вершину a и гиперребро E_1, мы получим цикл в $T(H)$, что противоречит пункту 1. Из доказанного следует, что $d_H(a)$ равняется количеству компонент связности гиперграфа $H - a$.

4) Прямое следствие пункта 3.

5) Пусть a — висячая вершина дерева $T(H)$, а b — единственная смежная с ней вершина. Если a соответствует гиперребру R гипердерева H, то $R = \{b\}$. Однако, по определению гиперграфа должно быть $|R| \ge 2$, противоречие. Значит, $a \in V(H)$ и по пункту 4 очевидно, что эта вершина — крайняя.

Наоборот, пусть a — крайняя вершина гипердерева H. По пункту 4, она входит ровно в одно гиперребро R, а значит, является висячей в дереве $T(H)$.

6) Рассмотрим все пути в H от b до гиперребра R, внутренние вершины которых не входят в R, и отметим множество всех их концов в гиперребре R. Пусть мы отметили хотя бы две вершины из R. Тогда в H

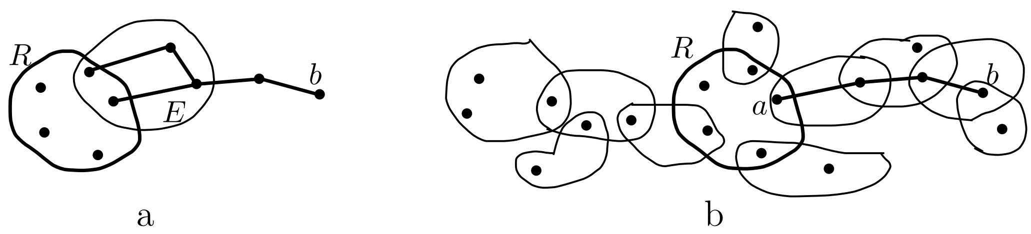


Рис. 4.4: Гипердерево H и его гиперребро R.

существует цикл Z, содержащий две отмеченные вершины и хотя бы одну вершину не из R (см. рисунок 4.4a), а следовательно, существует и гиперребро E, содержащее все вершины Z. Это гиперребро не совпадает с R и $|E \cap R| \geq 2$, что противоречит пункту 2.

Значит, каждый путь в H от b до гиперребра R, внутренние вершины которого не входят в R, имеет концом одну и ту же вершину $a \in R$. Это означает, что a отделяет b от R (см. рисунок 4.4b). $\square$

4.4.2 Гипердерево разбиения $\mathrm{Struct}(V)$

Определение 4.8. 1) Рассмотрим конечное множество вершин V. Пусть каждой вершине $w \in V$ соответствует разбиение V_w множества $V \setminus \{w\}$ на несколько *классов* (возможно, такой класс всего один). Будем говорить, что вершина w *разделяет* вершины v_1 и v_2, если v_1 и v_2 лежат в разных классах V_w. Будем называть V *множеством с разбиением.*

2) Назовем вершины $v_1, v_2 \in V$ *соседними*, если их не разделяет никакая отличная от них вершина множества V.

Построим *гиперграф разбиения* $\mathrm{Struct}(V)$ на вершинах множества V, гиперребра которого — это максимальные по включению множества попарно соседних вершин.

3) Для любого $W \subset V$ определим *индуцированное разбиение*: для каждой вершины $x \in W$ положим $W_x = V_x \cap W$.

Лемма 4.3. *Пусть V — множество с разбиением, $W \subset V$ — его подмножество с индуцированным разбиением. Предположим, что ни одна из вершин множества $V \setminus W$ не разделяет никакие две вершины из W. Тогда* $\mathrm{Struct}(W) = \mathrm{Struct}(V) - (V \setminus W)$.

Доказательство. Для любого гиперребра R гиперграфа $\mathrm{Struct}(W)$ из определения гиперграфа разбиения следует, что $R \cap W$ — гиперребро $\mathrm{Struct}(W)$, что нам и требовалось доказать. $\square$

Приведем пример множества вершин и гиперграфа разбиения, показывающий, какое отношение эта конструкция имеет к теории связности. Пусть F — связный граф, $\mathfrak{R}_1(F)$ — множество всех его точек сочленения, а для каждой точки сочленения $a \in \mathfrak{R}_1(F)$ классы разбиения $(\mathfrak{R}_1(F))_a$ состоят из точек сочленения, лежащих в одной компоненте связности графа $F - a$. Именно древовидная структура взаимного расположения точек сочленения связного графа подсказывает нам результат *теоремы о разбиении.*

Теорема 4.5. *Пусть для любых $a, b, c \in V$ если a разделяет b и c, то b не разделяет a и c. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Гиперграф* $\mathrm{Struct}(V)$ *является гипердеревом.*

2) *Пусть для некоторой вершины $a \in V$ гиперграф* $\mathrm{Struct}(V) - a$ *распадается на компоненты связности $W_1, \ldots, W_\ell$. Тогда $V_a = \{W_1, \ldots, W_\ell\}$.*

Доказательство. 1) **a.** Докажем индукцией по количеству вершин, что существуют такие вершины $a, b \in V$, для которых $|V_a| = |V_b| = 1$. База для множества, состоящего не более чем из двух вершин, очевидна.

Докажем индукционный переход. Рассмотрим произвольную вершину $c \in V$, пусть $V' = V \setminus \{c\}$. Для каждой вершины $x \in V'$ положим $V'_x = V_x \setminus \{c\}$. Несложно понять, что множество V' с указанным разбиением удовлетворяет условию теоремы. Следовательно, по индукционному предположению, существуют такие две вершины $a, b \in V'$, что $|V'_a| = |V'_b| = 1$. Если $|V_a| = |V_b| = 1$, то утверждение доказано.

Предположим, что $|V_a| > 1$. Тогда вершина a разделяет $V' \setminus \{a\} \ni b$ и c, следовательно, вершина b не может разделять a и c, а это означает, что $|V_b| = 1$. Для любой вершины $x \in V' \setminus \{a\}$ вершина a разделяет c и x, следовательно, вершина c не разделяет a и x. Таким образом, $|V_c| = 1$. В этом случае вершины b и c нам подходят.

b. Докажем индукцией по количеству вершин в множестве V связность графа $\mathrm{Struct}(V)$. База для множества, состоящего не более чем из трех вершин, очевидна. Рассмотрим вершины $a, b \in V$ такие, что

$$|V_a| = |V_b| = 1.$$

По индукционному предположению, гиперграф $\mathrm{Struct}(V \setminus \{a\})$ связен. Так как $|V_a| = 1$, то все вершины множества $V \setminus \{a\}$ связаны и в гиперграфе $\mathrm{Struct}(V)$. По аналогичным причинам, вершины множества $V \setminus \{b\}$ связаны в $\mathrm{Struct}(V)$, что означает связность гиперграфа $\mathrm{Struct}(V)$.

c. Пусть $a_1 a_2 \ldots a_k$ — путь в гиперграфе $\mathrm{Struct}(V)$, а вершина b не лежит на нем. Тогда b не разделяет пары вершин a_1 и $a_2, \ldots, a_{k-1}$ и a_k. Следовательно, b не разделяет a_1 и a_k.

Из этого факта очевидно следует, что любые две вершины, входящие в какой-либо цикл графа $\mathrm{Struct}(V)$, невозможно разделить никакой отличной от них вершиной. Следовательно, все вершины цикла принадлежат одному гиперребру. Таким образом, граф $\mathrm{Struct}(V)$ является гипердеревом.

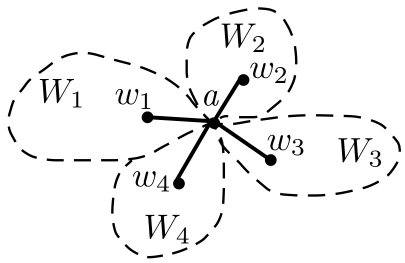


Рис. 4.5: Компоненты связности $\mathrm{Struct}(V) - a$.

2) Рассмотрим множество W_i. Из доказанного выше следует, что a не разделяет никакие две вершины из W_i, следовательно, все вершины из W_i лежат в одном классе разбиения V_a.

Рассмотрим две разных компоненты W_i и W_j и выберем в них смежные с a вершины w_i и w_j соответственно (см. рисунок 4.5). Никакая отличная от w_i, w_j, a вершина не может разделить пары смежных вершин $\{w_i, a\}$ и $\{w_j, a\}$. Следовательно, разделить вершины w_i и w_j может только a. Поскольку w_i и w_j не принадлежат одному гиперребру, то a их разделяет, следовательно, все вершины из W_i лежат в одном классе V_a, а все вершины из W_j — в другом. $\square$

Следствие 4.2. *Пусть V — множество с разбиением, причем для любых $a, b, c \in V$ если a разделяет b и c, то b не разделяет a и c. Пусть $W \subset V$ — подмножество с индуцированным разбиением. Тогда* $\mathrm{Struct}(W)$ *— гипердерево.*

Доказательство. Условие теоремы о разбиении, очевидно, наследуется для индуцированного разбиения множества W. $\square$

Глава 5

Структура двусвязного графа

В этой главе с помощью дерева разбиения мы опишем структуру взаимного расположения 2-вершинных разделяющих множеств двусвязного графа и частей, на которые они разбивают граф. В целом, полученная структура аналогична структуре, придуманной в 1966 году Таттом, но описанная в наших обозначениях и с помощью наших инструментов — дерева разбиения набора попарно независимых разделяющих множеств.

В конце главы мы применим полученную структуру для описания минимальных и критических двусвязных графов, а таке множеств вершин, одновременное удаление которых не нарушает двусвязности.

В этой главе граф G будет двусвязным. Объектом рассмотрения будут множества из $\mathfrak{R}_2(G)$.

5.1 Дерево разбиения двусвязного графа

Определение 5.1. Назовем множество $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ *одиночным*, если оно независимо со всеми другими множествами из $\mathfrak{R}_2(G)$. Обозначим через $\mathfrak{O}(G)$ набор, состоящий из всех одиночных множеств графа G.

Понятно, что одиночные множества попарно независимы, что позволяет нам дать следующее определение.

Определение 5.2. 1) *Дерево разбиения* $\mathrm{BT}(G)$ двусвязного графа G — это дерево $T(G, \mathfrak{O}(G))$.

2) Будем использовать обозначение $\mathrm{Part}(G)$ вместо $\mathrm{Part}(\mathfrak{O}(G))$ и называть части этого разбиения просто *частями графа* G. Часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ назовем *крайней*, если она соответствует висячей вершине дерева разбиения $\mathrm{BT}(G)$.

Замечание 5.1. 1) Из теоремы 4.2 следует, что $\mathrm{BT}(G)$ — дерево, все висячие вершины которого соответствуют крайним частям $\mathrm{Part}(G)$.

2) Если $A \in \mathrm{Part}(G)$ — крайняя часть, то $\mathrm{Bound}(A)$ — одиночное множество графа G.

Далее мы характеризуем части графа G и изучим расположение неодиночных двухвершинных разделяющих множеств в этом графе.

Определение 5.3. 1) Для двусвязного графа G обозначим через G' граф, полученный из G добавлением всех отсутствующих в $E(G)$ ребер вида ab, где $\{a,b\} \in \mathfrak{O}(G)$.

2) Назовём часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ *циклом*, если граф $G'(A)$ — простой цикл и 3-*блоком*, если граф $G'(A)$ трёхсвязен. Если часть A — цикл, то мы будем называть $|A|$ *длиной* цикла A.

Начнем с нескольких лемм.

Лемма 5.1. *Пусть S — одиночное множество двусвязного графа G, а $x \in S$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если одиночное множество S имеет степень $d_{\mathrm{BT}(G)}(S) = d$, то $d_G(x) \ge d$. Если $d_G(x) = d$, то вершины множества S несмежны.*

2) *$d_G(x) \ge 3$.*

Доказательство. 1) По теореме 4.2 мы имеем $|\mathrm{Part}(S)| = d_{\mathrm{BT}(G)}(S) = d$, а во внутренности каждой из d частей $\mathrm{Part}(S)$ есть вершина, смежная с x (иначе граф недвусвязен). Поэтому $d_G(x) \ge d$, а в случае равенства все смежные с x вершины лежат во внутренностях частей $\mathrm{Part}(S)$.

2) Пусть $d_G(x) = 2$. По пункту 1 тогда $|\mathrm{Part}(S)| = 2$ и вершины множества S несмежны. Значит, $\mathrm{N}_G(x) \in \mathfrak{R}_2(G)$ — множество, зависимое с S, противоречие. □

Теперь наша задача — понять смысл частей графа G. Опишем важное свойство частей графа и одиночных множеств, аналогичное свойству 3-блоков и точек сочленения. Это свойство позволит нам “разрезать” двусвязный граф по одиночному множеству.

Лемма 5.2. *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

1) *Множество $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ разделяет вершины $a, b \in V(G)$ в графе G тогда и только тогда, когда S разделяет их в G'. В частности,*

$$\mathfrak{R}_2(G) = \mathfrak{R}_2(G').$$

2) *Пусть $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ — неодиночное множество, $S \subset A \in \mathrm{Part}(G)$. Тогда $S \in \mathfrak{R}_2(G'(A))$, причем это множество — неодиночное и в $G'(A)$.*

Доказательство. 1) При построении G' мы соединяем дополнительными рёбрами только пары вершин, составляющих одиночное множество, а такие вершины не разделены ни одним из множеств набора $\mathfrak{R}_2(G)$. Отсюда легко следуют доказываемые утверждения.

2) Пусть $S' \in \mathfrak{R}_2(G)$ — зависимое с S множество. По пункту 1, мы имеем $S, S' \in \mathfrak{R}_2(G')$, причем эти множества зависимы и в графе G'. Так как граф $G'(A)$ двусвязен, нельзя разделить две вершины множества $S \subset A$ в графе G', удалив менее двух вершин из части A. Следовательно, $S' \subset A$. Тогда S и S' разделяют друг друга и в графе $G'(A)$. Следовательно, $S, S' \in \mathfrak{R}_2(G'(A))$, причем эти множества зависимы. □

Следующая лемма характеризует неодиночные множества. Похожую характеристику использовал Татт.

Лемма 5.3. *Пусть $S = \{a, b\} \in \mathfrak{R}_2(G)$ — неодиночное множество. Тогда $|\mathrm{Part}(S)| = 2$, причём для каждой части $A \in \mathrm{Part}(S)$ граф $G(A)$ недвусвязен и имеет точку сочленения, отделяющую a от b.*

Доказательство. Так как S — неодиночное, существует зависимое с ним множество $S' \in \mathfrak{R}_2(G)$. Множество S', как мы знаем, разделяет S. Значит, не существует ab-пути по вершинам части A в графе G, который не пересекается с S'. Однако, если S' не пересекает $\mathrm{Int}(A)$, то такой путь, очевидно, существует. Противоречие.

Таким образом, S' пересекает внутренность каждой части $\mathrm{Part}(S)$, откуда следует, что частей ровно две. Более того, если $\{x\} = S' \cap \mathrm{Int}(A)$, то x отделяет друг от друга вершины a и b в $G(A)$. □

Теорема 5.1. *Пусть G — двусвязный граф без одиночных множеств. Тогда либо G трёхсвязен, либо G — это простой цикл.*

Замечание 5.2. Напомним, что трёхсвязный граф содержит хотя бы 4 вершины. В частности, треугольник не является трёхсвязным графом и две альтернативы из теоремы 5.1 — взаимно исключающие.

Доказательство леммы 5.1. Предположим, что наш граф G нетрёхсвязен. *Для каждого множества $S = \{a, b\} \in \mathfrak{R}_2(G)$ и каждой части $A \in \mathrm{Part}(S)$ мы докажем, что $G(A)$ — это простой ab-путь.*

Доказательство будет индукцией по $|A|$, база для случая, когда часть A имеет ровно одну внутреннюю вершину, очевидна. Докажем переход. Пусть мы хотим доказать утверждение для части $A \in \mathrm{Part}(S)$, а для меньших частей утверждение уже доказано. Пусть $H = G(A)$. Так как множество S — неодиночное, по лемме 5.3 граф H имеет точку сочленения x, отделяющую a от b. Пусть U_a и U_b — компоненты связности графа $H - x$, содержащие a и b соответственно (см. рисунок 5.1a). Из двусвязности графа G следует, что других компонент связности в графе $H - x$ нет (такая компонента выделилась бы и в $G - x$).

Пусть $U'_a = U_a \setminus \{a\} \neq \varnothing$. Тогда $R_a = \{a, x\}$ отделяет U'_a от остальных вершин в графе G. Следовательно, по индукционному предположению, граф $G(U'_a \cup R_a) = G(U_a \cup \{x\})$ — простой ax-путь. Если $U_a = \{a\}$, то $\mathrm{N}_H(a) = \{x\}$ и $G(U_a \cup \{x\})$ — также простой ax-путь. Аналогично, граф $G(U_b \cup \{x\})$ — простой bx-путь. Следовательно, граф $G(A)$ — это простой ab-путь (см. рисунок 5.1b).

По лемме 5.3 мы знаем, что $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2\}$. Как мы доказали, оба графа $G(A_1)$ и $G(A_2)$ — простые пути между вершинами множества S, откуда, очевидно, следует, что G — простой цикл. □

Теорема 5.2. *Пусть G — двусвязный граф. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Каждая часть графа G — 3-блок или цикл.*

2) *Множество $R = \{a, b\}$ — неодиночное множество из $\mathfrak{R}_2(G)$, если и только если a и b — несоседние в циклическом порядке вершины некоторой части-цикла.*

Доказательство. 1) По лемме 4.2 мы знаем, что граф $G'(A)$ двусвязен. Предположим, $S \in \mathfrak{R}_2(G'(A))$. По лемме 4.2 мы имеем $S \in \mathfrak{R}_2(G)$. Множество S не может быть одиночным в G, так как разделяет часть $A \in \mathrm{Part}(G)$. По лемме 5.2 тогда S — неодиночное разделяющее множество в $G'(A)$. Следовательно, в $G'(A)$ нет одиночных множеств, а значит, по теореме 5.1 этот граф либо трёхсвязен, либо является циклом. В первом случае часть A является 3-блоком, а во втором — циклом.

2) $\Leftarrow$. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, причем вершины указаны в циклическом порядке, $R = \{a_1, a_m\}$, где $2 < m < k$. Тогда $R \in \mathfrak{R}_2(G'(A))$ и делит граф $G'(A)$ ровно на две части:

$$U_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \quad \text{и} \quad U_2 = \{a_m, a_{m+1}, \ldots, a_1\}.$$

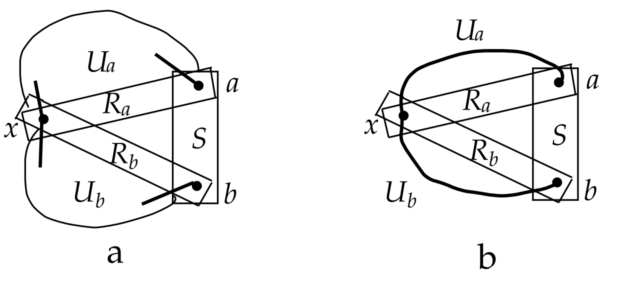


Рис. 5.1: Двусвязный граф без одиночных множеств.

По лемме 4.2 мы имеем $R \in \mathfrak{R}_2(G)$. Очевидно, $R \notin \mathfrak{O}(G)$.

$\Rightarrow$. Множество R независимо со всеми одиночными множествами графа G, а потому лежит в одной из частей $A \in \mathrm{Part}(G)$. По лемме 5.2 тогда $R \in \mathfrak{R}_2(G'(A))$. Из пункта 1 теоремы ясно, что тогда A — цикл длины хотя бы 4. Теперь понятно, что R состоит из двух несоседних вершин этого цикла. $\square$

Отметим еще два несложных свойства.

Следствие 5.1. *Пусть G — двусвязный граф, а $R \in \mathfrak{R}_2(G)$. Тогда R не содержит внутренних вершин частей-блоков и частей-треугольников (то есть, частей-циклов длины 3) графа G.*

Доказательство. Пусть $B \in \mathrm{Part}(G)$ — 3-блок или треугольник. Если R — одиночное множество и $x \in R \cap B$, то $x \in \mathrm{Bound}(B)$. Если же R — неодиночное, то $R \cap \mathrm{Int}(B) = \varnothing$ по теореме 5.2. $\square$

Следствие 5.2. *Если часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ — цикл, то все вершины из $\mathrm{Int}(A)$ имеют степень 2 в графе G.*

Доказательство. Если $x \in \mathrm{Int}(A)$, то рёбра графа G выходят из x только к вершинам части A, а таких рёбер, очевидно, ровно два. $\square$

Следующая лемма покажет нам еще одно полезное свойство частей двусвязного графа. Нам понадобится понятие подразбиения графа.

Определение 5.4. 1) Граф H' называется *подразбиением* графа H, если H' может быть получен из H заменой некоторых рёбер на простые пути. При этом, все добавляемые вершины различны и имеют степень 2.

2) Через $G \supset H$ будем обозначать, что граф G содержит в качестве подграфа подразбиение графа H.

Лемма 5.4. *Пусть G — двусвязный граф, $A \in \mathrm{Part}(G)$. Тогда $G \supset G'(A)$.*

Доказательство. Пусть $ab \in E(G'(A)) \setminus E(G)$. Тогда $a, b \in A$ и $\{a, b\} \in \mathfrak{O}(G)$. Пусть $U_{a,b} \in \mathrm{Part}(\{a, b\})$ — часть, не содержащая A. Тогда существует ab-путь $S_{a,b}$ по вершинам части $U_{a,b}$ в графе G. Заменим ребро ab на путь $S_{a,b}$.

В результате нескольких таких замен мы получим подграф H графа G. Пусть ab и xy — два разных замененных ребра (возможно, они имеют общий конец). Тогда части $U_{a,b}$ и $U_{x,y}$ разделены частью A в $\mathrm{BT}(G)$, поэтому не имеют общей внутренней вершины. Следовательно, никакие два добавленных пути не имеют общей внутренней вершины, а значит, граф H является подразбиением $G'(A)$. $\square$

5.2 Критические двусвязные графы

Дерево $\mathrm{BT}(G)$ помогает понять, как устроены критические двусвязные графы.

Следствие 5.3. 1) *Двусвязный граф G является критическим тогда и только тогда, когда все его части-блоки и части-треугольники имеют пустую внутренность.*

2) *Пусть $A \in \mathrm{Part}(S)$ — крайняя часть критического двусвязного графа G, смежная в $\mathrm{BT}(G)$ с одиночным множеством S. Тогда A — цикл длины хотя бы 4 и все вершины A, кроме двух вершин множества S, имеют в графе G степень 2.*

Доказательство. 1) Из теоремы 5.2 очевидно, что вершины, не входящие в множества из $\mathfrak{R}_2(G)$ (то есть вершины, удаление которых не нарушает двусвязность графа G) — это как раз внутренние вершины 3-блоков и треугольников графа G.

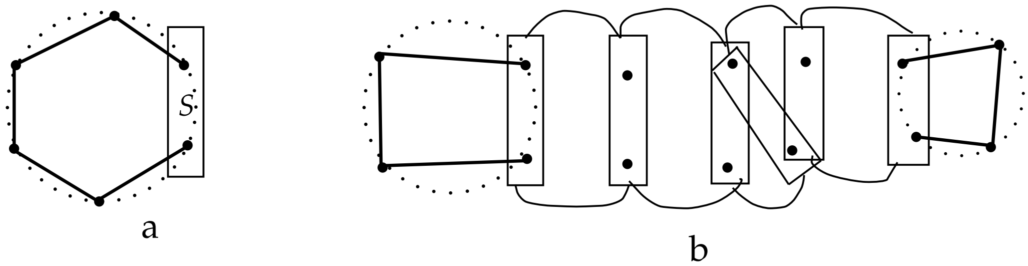


Рис. 5.2: Критические двусвязные графы.

2) Пусть A — крайняя часть графа G. По пункту 1, тогда A — цикл длины хотя бы 4, а S состоит из двух соседних вершин этого цикла. Остальные (хотя бы две) вершины A — внутренние и по следствию 5.2 имеют степень 2 в графе G (см. рисунок 5.2a). $\square$

Следствие 5.4. *Критический двусвязный граф на не менее чем 4 вершинах имеет хотя бы 4 вершины степени 4.*

Доказательство. Если граф G имеет хотя бы одно одиночное множество, то у графа G не менее двух крайних частей, утверждение очевидно следует из пункта 2 следствия 5.3. Пусть одиночных множеств у графа G нет. Критический двусвязный граф, очевидно, не является трёхсвязным и содержит хотя бы 4 вершины. Значит, по теореме 5.1 граф G — цикл длины не менее 4, в этом случае утверждение очевидно. $\square$

Более того, теперь понятно, как устроены критические двусвязные графы, у которых ровно 4 вершины степени 2. Во-первых, это цикл из четырех вершин. Теперь рассмотрим такой граф G не менее чем с пятью вершинами. Тогда дерево $\mathrm{BT}(G)$ должно иметь ровно две висячие вершины и они соответствуют циклам длины 4. Следовательно, все некрайние части и все одиночные множества имеют степень 2 в $\mathrm{BT}(G)$. Значит, каждое одиночное множество делит граф ровно на две части (для неодиночных множеств это всегда так).

Крайние части нашего графа содержат ровно 4 внутренних вершины степени 2, следовательно, в некрайних частях вершин степени 2 нет. Рассмотрим некрайнюю часть $A \in \mathrm{Part}(G)$. Так как $d_{\mathrm{BT}(G)}(A) = 2$, граница A состоит ровно из двух одиночных множеств, то есть, имеет 3 или 4 вершины. Докажем, что $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$. Если A — 3-блок, то это доказано в следствии 5.3. Если A — цикл, то его внутренняя вершина имеет степень 2 в графе G, как уже доказывалось выше, то есть, количество вершин степени два будет более 4.

Таким образом, некрайняя часть $\mathrm{Part}(G)$ может быть треугольником, четырёхугольником или 3-блоком из четырёх вершин, причем ее вершины покрываются двумя одиночными множествами, смежными с этой частью в дереве $\mathrm{BT}(G)$. Пример критического двусвязного графа G с 4 вершинами степени 2 приведен на рисунке 5.2б.

5.3 Удаление вершин с сохранением двусвязности

Если из связного графа удалить любую внутреннюю вершину любого блока, то связность не нарушится. Более того, если удалить из связного графа множество, состоящее из нескольких внутренних вершин блоков и содержащее не более чем по одной вершине каждого блока, то связность сохранится. В следующей теореме будет доказано аналогичное утверждение для двусвязного графа.

Следствие 5.1 говорит нам, что вершина двусвязного графа, удаление которой не нарушает двусвязности — это внутренняя вершина части-блока или части треугольника. Утверждение следующей теоремы в целом аналогично ситуации для связных графов.

Теорема 5.3. *Пусть G — двусвязный граф, а W — множество, состоящее из внутренних вершин непустых 3–блоков графа G и содержащее не более чем по одной вершине из каждого 3-блока. Тогда граф $G - W$ двусвязен.*

Доказательство. 1. Предположим, что утверждение теоремы неверно и рассмотрим минимальное по включению множество W, вершины которого принадлежат внутренностям разных непустых 3-блоков и такое, что граф $G^* = G - W$ недвусвязен. Так как внутренние вершины 3-блоков не входят в множества из $\mathfrak{R}_2(G)$, мы имеем $|W| \geq 2$. Так как вершины W принадлежат внутренностям разных 3-блоков, существует множество $S = \{a, b\} \in \mathfrak{R}_2(G)$, разделяющее W.

Так как S не содержит вершин из W и разделяет W, части $\mathrm{Part}(S)$ можно разбить на две группы так, чтобы в каждой группе была часть, содержащая вершину из W. Пусть U_1 и U_2 — объединения вершин этих частей,

$$U^* = V(G) \setminus W = V(G^*), \quad U_1^* = U_1 \setminus W, \quad U_2^* = U_2 \setminus W.$$

Так как каждый 3-блок графа G содержит хотя бы 4 вершины и не более чем одна из них удалена, множества вершин U_1^* и U_2^* содержат хотя бы по три вершины. Положим

$$G_1^* = G(U_1^*), \quad G_2^* = G(U_2^*), \quad G_1 = G_1^* + ab, \quad G_2 = G_2^* + ab.$$

2. Рассмотрим вершину $x \in U_2 \cap W$. Из выбора множества W мы знаем, что граф $G_x = G - (W \setminus \{x\})$ двусвязен. Очевидно, множество S отделяет U_1^* от $U_2^* \cup \{x\}$ в двусвязном графе G_x. Поэтому, с помощью теоремы Менгера нетрудно понять, что граф G_1 не имеет точек сочленения. Так как $|U_1^*| \geq 3$, граф G_1 двусвязен. Аналогично, граф G_2 двусвязен.

3. *Докажем, что от любой вершины $x \in U^*$ в графе G^* существует xa-путь P_a и xb-путь P_b, не имеющие общих вершин, кроме x.*
Не умаляя общности положим, что $x \in U_1^*$. Тогда по теореме Менгера два искомых пути есть в двусвязном графе G_1, эти же пути есть и в G^*.

4. *Теперь покажем, что для любой вершины $v \in U^*$ в графе $G^* - v$ все вершины из $U^* \setminus \{v\}$ связаны, то есть, граф $G^* = G - W$ двусвязен.*
Рассмотрим любую вершину $x \notin S$. По пункту 3, в графе G^* существует два непересекающихся пути от x до вершин множества S. Один из этих путей есть и в $G^* - v$.

Остается доказать, что при $v \notin S$ вершины a и b множества S связаны в графе $G^* - v$. Не умаляя общности можно считать, что $v \in U_1^*$. Тогда существует ab-путь P в графе $G^* - v$, проходящий по вершинам из U_2^*, значит, a и b связаны в $G^* - v$.

Двусвязность графа G^* противоречит предположению. Следовательно, граф $G - W$ двусвязен для любого множества W, удовлетворяющего условию. □

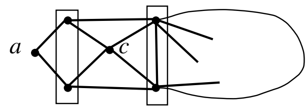


Рис. 5.3: Граф теряет двусвязность при удалении вершин a и c.

Отметим, что утверждение теоремы не может быть распространено на внутренние вершины непустых частей-треугольников двусвязного графа G. Если часть-треугольник A имеет внутреннюю вершину, то мы имеем $|\mathrm{Int}(A)| = 1$ и $|\mathrm{Bound}(A)| = 2$. Следовательно, $\mathrm{Bound}(A) \in \mathfrak{O}(G)$, а значит, часть A — крайняя. На рисунке 5.3 изображен граф, в котором отмечена внутренняя вершина a крайней части-треугольника и внутренняя вершина c части-блока. Их одновременное удаление делает граф недвусвязным.

5.4 Минимальные двусвязные графы

Теорема 5.4. *Двусвязный граф G является минимальным тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

(a) если $\{a, b\} \in \mathfrak{R}_2(G)$, то вершины a и b несмежны;

(b) для любого 3-блока A графа G граф $G(A)$ не имеет ни одного ребра.

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть G — минимальный двусвязный граф. Предположим, что

$$S = \{a, b\} \in \mathfrak{R}_2(G), \quad ab \in E(G), \quad \mathrm{Part}(S) = \{A_1, \ldots, A_n\}.$$

Так как G двусвязен, обе вершины a и b смежны с $\mathrm{Int}(A_j)$. Граф $G(\mathrm{Int}(A_j))$ связен, поэтому существует ab-путь, внутренние вершины которого лежат в $\mathrm{Int}(A_j)$ и их множество непусто. Таким образом, в графе $G - ab$ существует $n \geq 2$ непересекающихся по внутренним вершинам ab-путей, откуда следует двусвязность графа $G - ab$. Противоречие с минимальностью G показывает, что условие (a) выполнено.

Пусть A — 3-блок графа G; $x, y \in A$, $xy \in E(G)$. Граф $G'(A)$ трёхсвязен, следовательно, по теореме Менгера существует три xy-пути в графе G', не имеющие общих внутренних вершин. По лемме 5.4, граф G содержит подразбиение $G'(A)$, поэтому также содержит три xy-пути без общих внутренних вершин. Следовательно, граф $G - xy$ содержит два таких пути, а значит, он двусвязен. Противоречие с минимальностью G. Таким образом, условие (b) выполнено.

$\Leftarrow$. Пусть G — не минимальный граф, а ребро $xy \in E(G)$ таково, что граф $G - xy$ двусвязен. Понятно, что существует такая часть $A \in \mathrm{Part}(G)$, что $x, y \in A$. Из условия (b) следует, что A — цикл. Пусть $z \in A \setminus \{x, y\}$. Тогда множество $T = \{z, xy\}$ делит цикл $G'(A)$ на две компоненты связности $U_x \ni x$ и $U_y \ni y$.

Так как $\{x, y\}$, очевидно, не является одиночным множеством графа G, по пункту 2 леммы 4.2 граф $G - T$ несвязен, а значит, граф $G - xy$ недвусвязен. Полученное противоречие показывает, что граф G минимален. $\square$

Следствие 5.5. *Пусть G — минимальный двусвязный граф. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если A — блок графа G, то $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$.*

2) *Пусть A — крайняя часть графа G, смежная в $\mathrm{BT}(G)$ с одиночным множеством S. Тогда A — цикл, а все его вершины, кроме двух вершин множества S, имеют степень 2 в графе G.*

3) *Множество $V_3(G)$ состоит из всех вершин, входящих в одиночные множества графа G. Множество $V_2(G)$ состоит из всех внутренних вершин частей графа G.*

Доказательство. 1) Пусть $x \in \mathrm{Int}(A)$, рассмотрим ребро $xy \in E(G)$. Понятно, что $y \in A$, таким образом, граф $G(A)$ имеет ребро, что противоречит теореме 5.4.

2) Так как A — крайняя часть, то $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$. Значит, A — цикл и утверждение очевидно из следствия 5.2.

3) Прямое следствие леммы 5.1 и пункта 1. $\square$

Глава 6

Минимальные k-связные графы

Определение 6.1. Назовем ребро $e \in E(G)$ *критическим*, если граф $G - e$ не является k-связным.

Назовем k-связный граф *минимальным*, если все его ребра — критические.

В любом связном графе H, отличном от дерева существует такое ребро e, что граф $H - e$ связен — достаточно в качестве e взять любое ребро, входящее в цикл. Таким образом, минимальные 1-связные графы — это деревья. Как это ни удивительно, ситуация с минимальными k-связными графами во многом похожая. Наибольший вклад в исследования минимальных k-связных графов внёс немецкий математик В. Мадер, которому и принадлежат основные результаты этого раздела.

В этом разделе мы будем вести разговор о минимальном k-связном графе G и использовать для него следующие обозначения. Очевидно, все вершины k-связного графа имеют степень не менее k. Через V_k мы обозначим множество всех вершин графа G, имеющих степень k, пусть

$$V_{k+1} = V(G) \setminus V_k, \quad v_k = |V_k|, \quad v_{k+1} = |V_{k+1}|,$$
$$G_{k+1} = G(V_{k+1}), \quad E_{k+1} = E(G_{k+1}).$$

Пусть e_k — количество рёбер графа G, оба конца которых лежат в V_k. В тех случаях, когда из контекста неясно, о каком графе идет речь, мы будем применять обозначения $V_k(G)$, $V_{k+1}(G)$ и так далее.

Поскольку граф G минимален, то для каждого ребра $e \in E_{k+1}$ существует разрез, содержащий e и $k - 1$ вершину. Пусть $\mathfrak{R}$ — множество всех таких разрезов.

6.1 Минимальные k-связные графы с минимальным количеством вершин степени k

[Минимальне число вершин степени k]

В 1972 году В. Мадер доказал, что $v_k(G) \geq \frac{(k-1)v(G)+2}{2k-1}$ для минимального k-связного графа G. Доказательство этого утверждения достаточнои несложно и будет дано в разделе 6.1.2 (следствие 6.1).

Позже, в 1979 году Мадер доказал более сильное утверждение.

Теорема 6.1. *Для минимального k-связного графа G выполнено неравенство.*

$$v_k(G) \geq \frac{(k-1)v(G)+2k}{2k-1} \tag{6.1}$$

Эта оценка точная: для любого $k \geq 2$ существуют бесконечные серии минимальных k-связных графов, для которых неравенство (6.1) обращается в равенство. Мы будем называть такие графы *экстремальными* минимальными k-связными графами. Однако, и доказательство теоремы много сложнее первой оценки Мадера, оно будет приведено в разделе 6.1.5.

Определение 6.2. Пусть T — дерево с $\Delta(T) \leq k+1$. Граф $G_{k,T}$ строится из k копий $T_1, \dots, T_k$ дерева T с непересекающимися множествами вершин. Для каждой вершины $a \in V(T)$ обозначим через a_i соответствующую вершину копии T_i. Если $d_G(a) = j$, то мы добавим $k+1-j$ новых вершин степени k, смежных с $\{a_1, \dots, a_k\}$.

Очевидно, если $v(T) = n$, то $v(G_{k,T}) = (2k-1)n+2$. Несложно проверить, что $G_{k,T}$ — минимальный k-связный граф, для которого неравенство (6.1) обращается в равенство. Следовательно, граф $G_{k,T}$ — экстремальный.

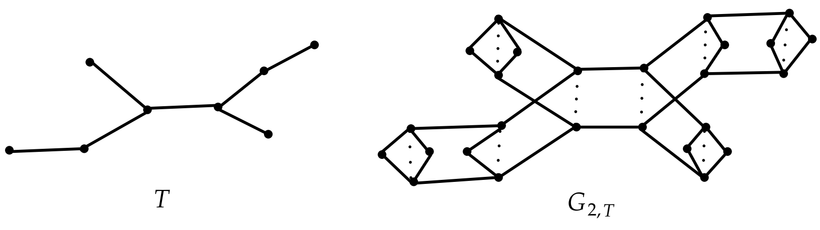


Рис. 6.1: Дерево T и экстремальный минимальный двусвязный граф $G_{2,T}$.

В этом разделе мы докажем, что других экстремальных минимальных k-связных графов нет.

Теорема 6.2. *Любой экстремальный минимальный k-связный граф — это граф $G_{k,T}$ для некоторого дерева T с $\Delta(T) \le k+1$.*

Основным инструментом изучения минимального k-связного графа являются разрезы. Мы продолжим изучение их свойств, начатое в разделе 4.3 и изучим свойства разрезов из $\mathfrak{R}$.

6.1.1 Пара зависимых разрезов

Пусть разрезы $S, T \in \mathfrak{R}$ зависимы, причем входящие в них рёбра различны. Введем обозначения

$$\begin{array}{c}\mathrm{Part}(S) = \{F_1, F_2\}, \quad \mathrm{Part}(T) = \{H_1, H_2\}, \quad G_{i,j} = F_i \cap H_j, \quad P = T \cap S \\ T_i = \mathrm{Int}(F_i) \cap T, \quad S_j = \mathrm{Int}(H_j) \cap S \quad \text{и} \quad \mathrm{Int}(G_{i,j}) = G_{i,j} \setminus (P \cup T_i \cup S_j).\end{array} \tag{6.2}$$

Пусть $R_{i,j} = \mathrm{Cut}(G_{i,j})$, а $\overline{G}_{i,j}$ — объединение трёх отличных от $G_{i,j}$ частей.

В дальнейшем для описания свойств пар зависимых разрезов мы будем употреблять именно такие обозначения.

Замечание 6.1. Множество P в нашем случае содержит только вершины.

Лемма 6.1. $|R_{i,j}| + |R_{3-i,3-j}| \le |S| + |T| = 2k$.

Доказательство. Вспомним, что множество $R_{i,j}$ состоит из $P \cup T_i \cup S_j$ и рёбер разрезов T и S, инцидентных вершинам из $\mathrm{Int}(G_{i,j})$. Вершины из P в обеих частях считаются дважды, а остальные вершины и рёбра из S и T в левой части считаются не более чем один раз, а в правой части — ровно один раз. □

6.1.2 Леммы Мадера и ее следствия

Лемма 6.2. *Пусть $ab, ac \in E_{k+1}$, $T_{ab} \ni ab$ и $T_{ac} \ni ac$ — разрезы из $\mathfrak{R}$, причем $a \in F_a \in \mathrm{Part}(T_{ab})$ и $c \in H_c \in \mathrm{Part}(T_{ac})$. Тогда*

$$|\mathrm{Int}(F_a)| > |\mathrm{Int}(H_c)|.$$

Доказательство. Так как

$$|F_a| - |\mathrm{Int}(F_a)| = k - 1 = |H_c| - |\mathrm{Int}(H_c)|,$$

достаточно доказать, что $|F_a| > |H_c|$.

Отметим, что $c \in F_a$. Если разрезы T_{ab} и T_{ac} независимы, то легко понять, что $F_a \supset H_c$ и $a \in F_a \setminus H_c$, а значит, $|F_a| > |H_c|$.

Если эти разрезы зависимы, то положим $S = T_{ab}$, $T = T_{ac}$ и применим введенные выше обозначения для пары зависимых множеств (6.2). Пусть $F_1 = F_a$, $H_2 = H_c$. Тогда нетрудно понять, что

$$a \in \mathrm{Int}(G_{1,1}), \quad b \in \mathrm{Int}(G_{2,1}), \quad c \in \mathrm{Int}(G_{1,2}).$$

Нам нужно доказать, что $|H_2| < |F_1|$. Определенные выше множества изображены на рисунке 6.2.

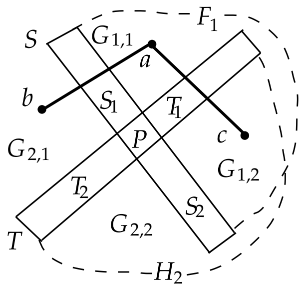


Рис. 6.2: Множества S, T и части разбиения.

Вершина $a \in \mathrm{Int}(G_{1,1})$ смежна с b, c и вершинами из $G_{1,1}$. Значит, если $\mathrm{Int}(G_{1,1}) = \{a\}$, то из $d_G(a) \geq k+1$ следует, что $R_{1,1}$ содержит хотя бы $k-1$ вершину. Если же $A = \mathrm{Int}(G_{1,1}) \setminus \{a\} \neq \varnothing$, то множество вершин $V(R_{1,1}) \cup \{a\}$ отделяет A от остальных вершин графа и, следовательно, содержит хотя бы k вершин. В любом случае мы имеем $|V(R_{1,1})| \geq k-1$ и $|R_{1,1}| \geq k+1$.

Из леммы 6.1 нам известно, что $|R_{1,1}| + |R_{2,2}| \leq 2k$. Следовательно, $|R_{2,2}| \leq k-1$, а значит, $\mathrm{Int}(G_{2,2}) = \varnothing$. Отметим, что

$$F_1 \setminus H_2 = \mathrm{Int}(G_{1,1}) \cup S_1 \quad \text{и} \quad H_2 \setminus F_1 = \mathrm{Int}(G_{2,2}) \cup T_2 = T_2.$$

Поскольку

$$|S_1| + |P| + |S_2| = |V(S)| = k-1 \geq |R_{2,2}| \geq |T_2| + |P| + |S_2|,$$

то $|S_1| \geq |T_2|$. Учитывая, что $|\mathrm{Int}(G_{1,1})| \geq 1$, мы получаем $|F_1| > |H_2|$. □

Следствие 6.1. (W. Mader, 1972.) *Пусть G — минимальный k-связный граф. Граф G_{k+1} — лес.*

Доказательство. Предположим противное, пусть $a_1a_2\dots a_n$ — простой цикл в G_{k+1}. Из минимальности графа G следует, что ребро $a_{i-1}a_i$ — критическое, следовательно, существует разрез $S_i \in \mathfrak{T}'(G)$, содержащий $a_{i-1}a_i$. Обозначим через H_i часть $\mathrm{Part}(S_i)$, содержащую a_i. Тогда по лемме 6.2 мы имеем

$$|H_1| > |H_2| > \dots > |H_n| > |H_1|,$$

что очевидно невозможно. □

Лемма 6.3. *Пусть c — количество компонент связности графа G_{k+1}. Тогда*

$$v_k(G) \geq \frac{(k-1)v(G) + 2(c+e_k)}{2k-1}.$$

Доказательство. Из каждой вершины множества V_{k+1} выходит не менее чем $k+1$ ребро, сумма степеней вершин леса G_{k+1} равна $2v_{k+1} - 2c$, следовательно, не менее чем $(k-1)v_{k+1} + 2c$ ребер выходит из V_{k+1} в V_k. Из вершин множества V_k выходит ровно $kv_k - 2e_k$ рёбер к вершинам множества V_{k+1}. Поэтому

$$(k-1)v_{k+1} + 2c \leq kv_k - 2e_k,$$

откуда немедленно следует утверждение леммы. □

Непосредственно из определения экстремального графа и леммы 6.3 можно сделать следующие выводы. Один из них — первая оценка Мадера на количество вершин степени k в минимальном k-связном графе.

Следствие 6.2. (W. Mader, 1972.) *Пусть G — минимальный k-связный граф. Тогда $v_k(G) \geq \frac{(k-1)\cdot v(G)+2}{2k-1}$.*

Следствие 6.3. *Пусть G — минимальный k-связный граф, такой, что $e_k + c > k$. Тогда граф G — не экстремальный.*

Замечание 6.2. Неравенство Мадера (6.1) следует из $e_k + c \geq k$. Мы докажем это утверждение и исследуем случаи, когда достигается равенство. Отметим, что из доказательства леммы 6.3 ясно, что при $e_k + c = k$ равенство в (6.1) может достигаться только в случае, когда $\Delta(G) \leq k+1$.

Из следствия 6.1 легко вывести утверждение для минимальных графов малой связности, доказанное Халиным на 3 года раньше.

Теорема 6.3. (R. Halin, 1969.) *Пусть G — минимальный k-связный граф, $2 \leq k \leq 3$. Тогда в каждом треугольнике графа G не менее двух вершин степени k.*

Доказательство. По следствию 6.1 в каждом цикле, а стало быть, и в треугольнике графа G есть вершина степени k. Остается доказать, что не существует треугольника, в котором одна вершина имеет степень k, а две другие — степень более k.

Предположим, что такой треугольник $xx'y$ есть: $x, x' \in V_{k+1}$, $y \in V_k$. В силу минимальности графа, существует такой разрез $T \in \mathfrak{T}'(G)$, что $xx' \in T$. Так как граф $G - T$ несвязен, а $yx, yx' \in E(G)$, мы имеем $y \in T$. Пусть $\mathrm{Part}(T) = \{A, A'\}$, где $A \ni x$ и $A' \ni x'$. Введем обозначения $R = \mathrm{R}(A)$, $R' = \mathrm{R}(A')$, $A_0 = A \setminus R$, $A'_0 = A' \setminus R'$.

В силу $d_G(x) \ge k+1$ мы имеем $A_0 \ne \varnothing$. Тогда по замечанию 3.5 оказывается, что вершина $y \in R$ имеет смежную вершину $z \in A_0$. Аналогично, y смежна с вершиной $z' \in A'_0$. Легко видеть, что z, z', x, x' — четыре разные вершины, откуда следует $k = d_G(y) \ge 4$, противоречие. □

В конце главы будет приведено обобщение этой теоремы на цикл произвольной длины.

6.1.3 Нормальные разрезы

Определение 6.3. Назовем разрез $S \in \mathfrak{R}$ *кривым*, если существует часть $A \in \mathrm{Part}(S)$ с $|\mathrm{Int}(A)| < \frac{k}{2}$ и *нормальным*, если такой части не существует.

Лемма 6.4. *Пусть оба зависимых разреза $S, T \in \mathfrak{R}$ — нормальные, $a_1a_2 \in S$ и $b_1b_2 \in T$ — различные рёбра из E_{k+1}. Тогда для каждого из рёбер a_1a_2 и b_1b_2 существуют такие $i, j \in \{1, 2\}$, что $R_{i,j}$ — разрез, содержащий это ребро, причем $|R_{i,j}| = k$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Int}(G_{1,1}) \ne \varnothing$, $\mathrm{Int}(G_{2,2}) \ne \varnothing$. Тогда из леммы 6.1 следует, что

$$|R_{1,1}| = k = |R_{2,2}| \quad \text{и} \quad R_{1,1} \cup R_{2,2} = S \cup T.$$

Следовательно, $R_{1,1} \cup R_{2,2} \supset \{a_1a_2, b_1b_2\}$, откуда следует утверждение леммы. Случай $\mathrm{Int}(G_{1,2}) \ne \varnothing$, $\mathrm{Int}(G_{2,1}) \ne \varnothing$ разбирается аналогично.

Пусть условия рассмотренных выше случаев не выполнены. Тогда не умаляя общности можно считать, что $\mathrm{Int}(G_{1,1}) = \mathrm{Int}(G_{1,2}) = \varnothing$, то есть, $\mathrm{Int}(F_1) = T_1$ (см. рисунок 6.3a). Из нормальности разреза S следует, что $|T_1| \ge \frac{k}{2}$.

Так как $T = T_1 \cup T_2 \cup P \cup \{b_1b_2\}$, отсюда можно сделать вывод

$$|T_2 \cup P| \le \frac{k}{2} - 1 \quad \text{и} \quad |R_{2,1}| + |R_{2,2}| \le |S| + 2|T_2 \cup P \cup \{b_1b_2\}| \le 2k. \quad (6.3)$$

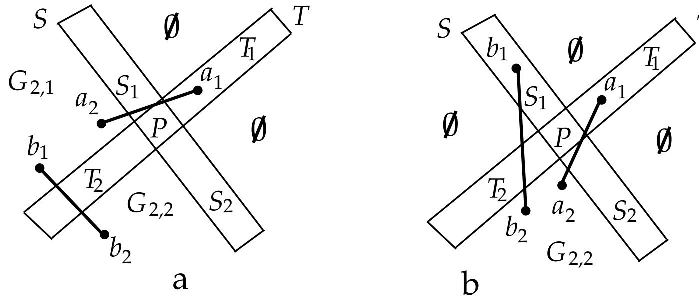


Рис. 6.3: Разбиение графа парой нормальных зависимых разрезов.

Если $\mathrm{Int}(G_{2,1}) = \varnothing$ (см. рисунок 6.3b), то из нормальности разреза T мы имеем $\mathrm{Int}(H_1) = |S_1| \geq \frac{k}{2}$, а следовательно, $|S_2 \cup P| \leq \frac{k}{2} - 1$, откуда очевидно следует

$$|R_{2,2}| \leq |S_2| + |T_2| + |P| + |\{a_1a_2, b_1b_2\}| \leq k.$$

Если и $\mathrm{Int}(G_{2,2}) = \varnothing$, то $\mathrm{Int}(F_2) = S_2$, что противоречит нормальности разреза T. Значит, $\mathrm{Int}(G_{2,2}) \neq \varnothing$, но это возможно только при $|R_{2,2}| = k$, что, в частности, означает, что $R_{2,2} \supset \{a_1a_2, b_1b_2\}$. Тогда разрез $R_{2,2}$ нам подходит.

Остается случай, когда $\mathrm{Int}(G_{2,1}) \neq \varnothing$ и $\mathrm{Int}(G_{2,2}) \neq \varnothing$. По неравенству (6.3) это означает, что $|R_{2,1}| = |R_{2,2}| = k$. Тогда оба разреза $R_{2,1}$ и $R_{2,2}$ содержат ребро b_1b_2 и $R_{2,1} \cup R_{2,2} \supset S \ni a_1a_2$. Следовательно, один из разрезов $R_{2,1}$ и $R_{2,2}$ содержит оба ребра b_1b_2 и a_1a_2, откуда следует утверждение леммы. □

Лемма 6.5. *Пусть разрезы $S, T \in \mathfrak{R}$ зависимы, причем $a_1a_2 \in S$ и $b_1b_2 \in T$ — различные рёбра из E_{k+1}, $R_{i,j} \ni b_1b_2$ и $|R_{i,j}| = k$. Тогда существует разрез $R \in \mathfrak{R}$, удовлетворяющий следующим свойствам:*

1° $\mathrm{Part}(R) = \{G_{i,j}, U\}$, *причём либо $U = \overline{G}_{i,j}$, либо $U = \overline{G}_{i,j} \cup \{a\}$, где a — конец ребра a_1a_2, лежащий в $G_{i,j}$;*

2° *R независим и с S, и с T.*

Доказательство. Пусть $i = j = 1$. Так как $b_1b_2 \in R_{1,1}$, один из концов ребра b_1b_2 лежит в $\mathrm{Int}(G_{1,1})$, пусть это b_1. Значит, $\mathrm{Int}(G_{1,1}) \neq \varnothing$ и по лемме 3.12 мы знаем, что $R_{1,1}$ — разрез. Более того, $\mathrm{Part}(R_{1,1}) = \{G_{1,1}, W\}$, где $W \supset \overline{G}_{1,1}$ и $W \setminus \overline{G}_{1,1}$ может состоять только из конца ребра a_1a_2, причём в этом случае $a_1a_2 \notin R_{1,1}$. Таким образом, при $a_1a_2 \notin R_{1,1}$ мы имеем $R_{1,1} \in \mathfrak{R}$ и разрез $R = R_{1,1}$ нам подходит.

Пусть $a_1a_2 \in R_{1,1}$. Тогда $W = \overline{G}_{1,1}$. Так как $a_1a_2 \in R_{1,1}$, ребро a_1a_2 имеет конец в $\mathrm{Int}(G_{1,1})$, пусть это a_1. Рассмотрим множество R, полученное из $R_{1,1}$ заменой a_1a_2 на a_1. Если $\mathrm{Int}(G_{1,1}) \neq \{a_1\}$, то R — разрез,

$$\mathrm{Part}(R) = \{G_{1,1},\ \overline{G}_{1,1} \cup \{a_1\}\}$$

(см. рисунок 6.4a), откуда очевидно следует, что этот разрез независим с S и T, а стало быть, он нам подходит.

Пусть $\mathrm{Int}(G_{1,1}) = \{a_1\}$. Тогда, в частности, $a_1 = b_1$ (см. рисунок 6.4b). Кроме a_2 и b_2 эта вершина может быть смежна только с вершинами из $R_{1,1}$. Тогда из $d_G(a_1) \geq k+1$ следует, что $|V(R_{1,1})| \geq k-1$. Но это означает, что $|R_{1,1}| \geq k+1$, противоречие. □

Лемма 6.6. *Пусть G — минимальный k-связный граф, а множество $E \subset E_{k+1}$ таково, что все разрезы из $\mathfrak{R}$, содержащие ребра из E — нормальные. Тогда существует множество*

$$\mathfrak{S} = \{S_e\}_{e \in E} \subset \mathfrak{R}, \quad \text{где} \quad e \in S_e,$$

состоящее из попарно независимых разрезов.

Доказательство. Пронумеруем $f_1, \ldots, f_m$ ребра множества E. Пусть

$$\mathfrak{S}' = \{S_1, \ldots, S_{\ell-1}\} \subset \mathfrak{R}$$

— множество попарно независимых разрезов, причем $f_i \in S_i$.

Пусть $f_\ell \in T \in \mathfrak{R}$. Докажем, что можно изменить разрез T так, чтобы он стал независимым со всеми разрезами из $\mathfrak{S}'$. Доказательство будет индукцией по $|\mathfrak{S}'|$. База для случая $|\mathfrak{S}'| = 0$ очевидна.

Докажем индукционный переход. Пусть разрез T независим с разрезами S_1, …, S_{i-1}, но зависим с S_i. Введем обозначения

$$\mathrm{Part}(T) = \{H_1, H_2\}, \quad \mathrm{Part}(S_i) = \{F_1, F_2\}, \quad G_{x,y} = F_x \cap H_y.$$

Так как разрезы S_i и T нормальны, по леммам 6.4 и 6.5 существует такой разрез $R \ni f_\ell$, что одна из частей $\mathrm{Part}(R)$ — это $G_{\alpha,\beta}$, а другая часть U

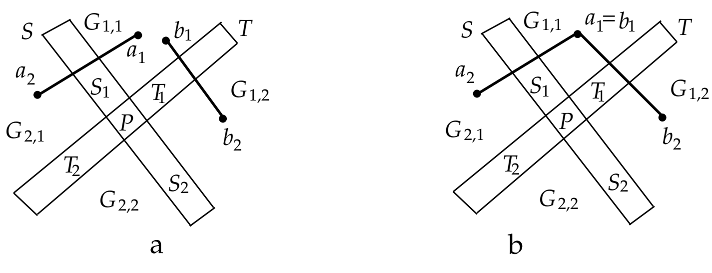


Рис. 6.4: Разбиение графа парой зависимых разрезов.

— либо $\overline{G}_{\alpha,\beta}$, либо $\overline{G}_{\alpha,\beta} \cup \{a\}$, где a — конец ребра $f_\ell = ab$, лежащий в $G_{\alpha,\beta}$.

Мы хотим доказать, что R независим с произвольным разрезом $S_j \in \mathfrak{S}'$. Пусть $\mathrm{Part}(S_j) = \{D_1, D_2\}$. Так как разрезы S_i и S_j независимы, разрезы T и S_j независимы, а разрезы T и S_i зависимы, по лемме 3.13 можно считать, что

$$F_1 \supset D_2, \quad F_2 \subset D_1, \quad H_1 \supset D_2, \quad H_2 \subset D_1. \tag{6.4}$$

Разберем несколько случаев.

1. $\alpha = 2$.
Тогда $G_{2,\beta} \subset F_2 \subset D_1$ и $U \supset F_1 \supset D_2$ (см. рисунок 6.5a), то есть, разрезы R и S_j независимы.

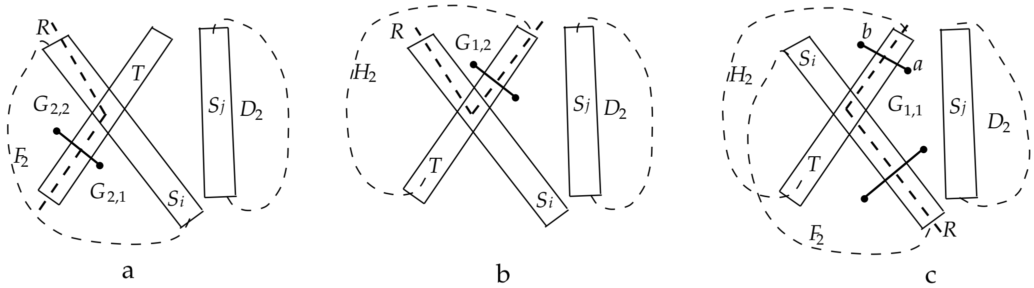


Рис. 6.5: Разрезы S_i, S_j и T.

2. $\alpha = 1$. Разберем два подслучая.

2.1. $\beta = 2$.
Тогда $G_{\alpha,\beta} = G_{1,2} \subset H_2 \subset D_1$ и $U \supset H_1 \supset D_2$ (см. рисунок 6.5b), что означает независимость разрезов S_j и R.

2.2. $\beta = 1$.
В силу (6.4) мы имеем $D_1 \supset H_2 \cup F_2 = \overline{G}_{1,1}$ (см. рисунок 6.5c). Так как разрезы T и S_j независимы и не имеют общих рёбер, по лемме 3.14 мы имеем $D_1 \supset W(T) \ni a$. Значит,

$$D_1 \supset \overline{G}_{1,1} \cup \{a\} \supset U.$$

Из $D_2 \subset F_1$ и $D_2 \subset H_1$ следует, что

$$D_2 \subset H_1 \setminus \mathrm{Int}(F_2) = G_{1,1}.$$

Таким образом, мы проверили независимость разрезов S_j и R. $\square$

Лемма 6.7. *Пусть G — минимальный k-связный граф, а $P = a_1 \dots a_n$ — простой путь, все вершины которого принадлежат множеству V_{k+1}. Предположим, что существуют такие попарно независимые разрезы $S_1, \dots, S_{n-1} \in \mathfrak{R}$, что*

$$a_i a_{i+1} \in S_i, \quad \mathrm{Part}(S_i) = \{A_i, B_{i+1}\}, \qquad \text{причем} \quad a_i \in \mathrm{Int}(A_i) \quad \text{и} \quad a_{i+1} \in \mathrm{Int}(B_{i+1}).$$

Тогда выполняются следующие утверждения.

1) $B_n \subset B_2$.

2) $B_2 \cup \{a_1\} \supset \mathrm{N}_G(a_n)$.

Доказательство. 1) При $n = 2$ это утверждение очевидно. Предположим, что $n \geq 3$. Докажем, что $B_i \supset B_{i+1}$ при $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Так как разрезы S_{i-1} и S_i независимы, $a_i \in \mathrm{Int}(B_i)$ и $a_i a_{i+1} \notin S_{i-1}$, мы имеем $a_{i+1} \in B_i$. Значит, ни одна из частей $\mathrm{Part}(S_i)$ не может содержать $B_i \ni a_i, a_{i+1}$. В силу независимости разрезов S_{i-1} и S_i, тогда B_i содержит одну из частей $\mathrm{Part}(S_i) = \{A_i, B_{i+1}\}$.

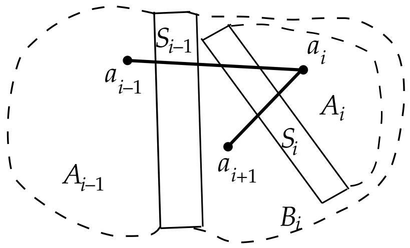


Рис. 6.6: Разрезы S_{i-1} и S_i. Случай, когда $B_i \supset A_i$.

Предположим, что $B_i \supset A_i$ (см. рисунок 6.6). Тогда из $a_{i-1} \notin B_i$ следует $a_{i-1} \notin A_i$. Однако, вершина a_{i-1} смежна с вершиной $a_i \in \mathrm{Int}(A_i)$, что в силу $a_{i-1}a_i \notin S_i$ невозможно. Следовательно, $B_i \supset B_{i+1}$, откуда $B_2 \supset B_3 \supset \dots \supset B_n$.

2) Так как $a_n \in \mathrm{Int}(B_n)$, мы имеем

$$\mathrm{N}_G(a_n) \subset B_n \cup \{a_{n-1}\} \subset B_2 \cup \{a_1\}.$$

(При $n \geq 3$ мы имеем $a_{n-1} \in B_{n-1} \subset B_2$ и добавлять b_1 не нужно.) □

Лемма 6.8. *Пусть G — минимальный k-связный граф, $E \subset E_{k+1}$, а множество*

$$\mathfrak{S} = \{S_e\}_{e \in E} \subset \mathfrak{R}, \quad \text{где} \quad e \in S_e,$$

состоит из попарно независимых разрезов. Пусть R — граница разреза $S_e \in \mathfrak{S}$. Тогда любой простой путь с концами из R содержит ребро не из множества E.

Доказательство. Предположим противное и рассмотрим кратчайший путь $P = a_1a_2\dots a_n$ по рёбрам из E, концы которого a_1 и a_n лежат в R. Если путь P содержит всего одно ребро a_1a_2, то $a_1a_2 \neq e$, так как граница R разреза $S_e \ni e$ содержит ровно одну вершину ребра e. Если же $n \geq 3$ и $e = a_1a_2$, то перенумеруем вершины пути P в обратном порядке. Таким образом, в любом случае мы добьемся того, что $e \neq a_1a_2$. Пусть

$$S_i = S_{a_ia_{i+1}}, \quad \mathrm{Part}(S_i) = \{A_i, B_{i+1}\}, \text{ где } a_i \in \mathrm{Int}(A_i) \text{ и } a_{i+1} \in \mathrm{Int}(B_{i+1}).$$

Так как разрезы S_e и S_1 независимы и не имеют общего ребра, по лемме 3.14 одна из частей $U \in \mathrm{Part}(S_1)$ содержит $W(S_e)$. Значит, $U \supset R \ni a_1$, откуда следует, что $U = A_1$. По лемме 6.7 мы имеем $\mathrm{N}_G(a_n) \subset B_2 \cup \{y_1\}$ (см. рисунок 6.7).

Так как разрез S_e нормален, $\mathrm{Int}(A_1) \neq \{a_1\}$. Значит, $R \in \mathfrak{R}_k(G)$. Из $R \subset A_1$ следует, что R не разделяет $B_2 \cup W(S_1)$. Значит, одна из компонент связности M графа $G - R$ лежит в $\mathrm{Int}(A_1) \setminus \{y_1\}$. Из k-связности графа G следует, что вершина $a_n \in R$ должна иметь смежную вершину в $M \subset \mathrm{Int}(A_1)$, что противоречит доказанному выше. $\square$

6.1.4 Кривые разрезы

Напомним, что c — это количество компонент связности графа G_{k+1}, а e_k — количество рёбер, оба конца которых имеют степень k.

Лемма 6.9. *Пусть G — минимальный k-связный граф, причем в множестве $\mathfrak{R}$ есть кривые разрезы. Тогда $e_k + c \geq k + 1$.*

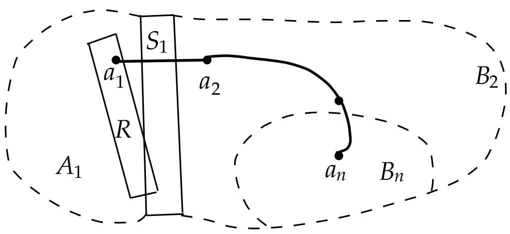


Рис. 6.7: Путь по ребрам из E.

Доказательство. Везде в доказательстве через S_e мы обозначаем разрез из $\mathfrak{R}$, содержащий ребро $e \in E_{k+1}$. (Для каждого ребра $e \in E_{k+1}$ такой разрез существует, причем, возможно, не один.)

1. *Пусть* $e = a_1a_2 \in E_{k+1}$, *а разрез* S_e *— кривой, причем*

$$a_1 \in A_1 \in \mathrm{Part}(S_e) \quad \text{и} \quad |\mathrm{Int}(A_1)| < \frac{k}{2}.$$

Пусть $U \ni a_1, a_2$ — компонента связности графа G_{k+1}, а $T = G_{k+1}(U)$. Тогда T — дерево по следствию 6.1. Предположим, что $d_T(a_1) > 1$. Тогда в дереве T существует путь от a_1 до висячей вершины a, не проходящий по ребру a_1a_2. Пусть $a'a$ — последнее ребро этого пути, $S_{aa'} \in \mathfrak{R}$, причем $a \in A \in \mathrm{Part}(S_{aa'})$. Тогда по лемме 6.2 мы имеем $|\mathrm{Int}(A)| < |\mathrm{Int}(A_1)| < \frac{k}{2}$. В частности, разрез $S_{aa'}$ — также кривой.

2. *Пусть* a_1 *— висячая вершина дерева* T,

$$|\mathrm{Int}(A_1)| = p < \frac{k}{2}, \quad S = V(S_{a_1a_2}).$$

Отметим, что $|S| = k - 1$. Пусть

$$M = \mathrm{Int}(A_1) \cap V_k, \quad m = |M|$$

(см. рисунок 6.8а). Очевидно, вершина a_1 не может быть смежна с вершинами из $V_{k+1} \cap A_1$, следовательно, вершина a_1 смежна не более чем с m вершинами из $\mathrm{Int}(A_1)$. Из $d_G(a_1) \geq k+1$ следует, что тогда a_1 несмежна не более чем с $m - 1$ вершинами из S. Все смежные с a_1 вершины из S имеют степень k. Таким образом,

$$|\mathrm{Int}(A_1) \cap V_{k+1}| = p - m, \quad |S \cap V_{k+1}| \leq m - 1 \quad \text{и} \quad |A_1 \cap V_{k+1}| \leq p - 1.$$

Разберем два случая.

2.1. $m \geq 2$.

Вершина множества M может быть смежна только с вершинами из A_1. Поэтому, каждая вершина множества M смежна не более чем с $p - 1$ вершинами из V_{k+1}, а значит, хотя бы с $k - p + 1$ вершинами из V_k. Просуммировав рёбра, исходящие из всех вершин M к вершинам из V_k, мы получим хотя бы $m(k - p + 1)$. Однако, рёбра между вершинами множества M (которых не более чем $\frac{m(m-1)}{2}$) в этой сумме посчитаны дважды, поэтому можно написать, что

$$e_k \geq m(k-p+1) - \frac{m(m-1)}{2} \geq k+3+(m-2)(k-p+1) - \frac{m(m-1)}{2} \geq k+2, \tag{6.5}$$

что и требовалось доказать. (При $m = 2$ неравенство (6.5) очевидно, а при $m \geq 3$ мы воспользовались тем, что $k - p + 1 \geq p \geq m$ и $m - 2 \geq \frac{m-1}{2}$, а следовательно, правая часть неравенства (6.5) не менее чем $k + 3$.)

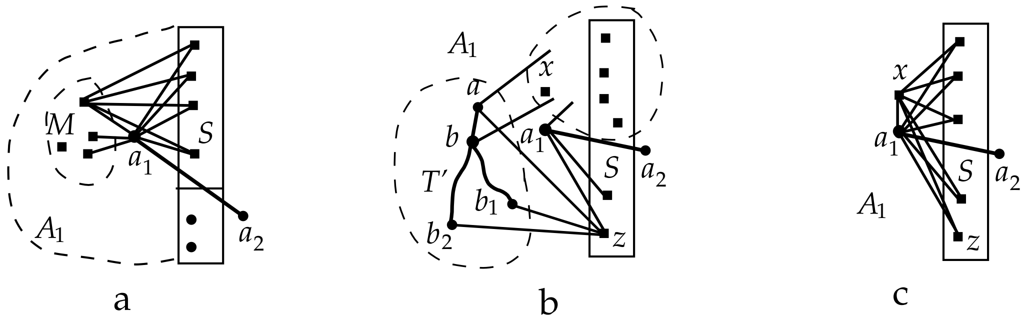


Рис. 6.8: Кривой разрез $S_{a_1a_2}$ и часть A_1. На этом и следующих рисунках кружочки обозначают вершины из V_{k+1}, а квадратики — вершины из V_k.

2.2. $m = 1$.

Пусть $M = \{x\}$. Понятно, что в этом случае a_1 смежна ровно с одной вершиной из $\mathrm{Int}(A_1)$ (с вершиной x), а значит, a_1 смежна со всеми вершинами из S. Следовательно, $S \subset V_k$.

Предположим, что $Y = (\mathrm{Int}(A_1) \setminus \{a_1\}) \cap V_{k+1} \neq \varnothing$. По доказанному выше, тогда Y — одна или несколько компонент связности графа G_{k+1}. Пусть $T' = G_{k+1}(Y)$. По Теореме 1, граф T' — лес.

Пусть $a \in Y$, $d_{T'}(a) \le 1$. Тогда из $d_G(a) \ge k+1$ следует, что $d_{T'}(a) = 1$, причем a должна быть смежна с x и со всеми $k-1$ вершинами из S. Таким образом, лес T' не содержит изолированных вершин.

Пусть a — висячая вершина T', смежная в T' с вершиной b степени $d_{T'}(b) = \ell$ (см. рисунок 6.8b). Тогда в T' существуют $\ell - 1$ непересекающиеся по внутренним вершинам пути P_1, …, $P_{\ell-1}$ от b до отличных от a висячих вершин b_1,…, $b_{\ell-1}$ леса T'.

Рассмотрим разрез $S_{ab} \in \mathfrak{R}$. Отметим, что вершина b смежна хотя бы с $k - \ell + 1$ вершинами множества $S \cup \{x\}$, и все эти вершины должны быть в S_{ab}. Разрез S_{ab} содержит $k - 1$ вершину, а значит, не содержит некоторую вершину $z \in S \cup \{x\}$.

Как доказано выше, вершина a и каждая из висячих вершин b_1,…, $b_{\ell-1}$ смежна с z, а значит, разделяющий a и b разрез S_{ab} должен содержать по вершине каждого из путей P_1, …, $P_{\ell-1}$. Но тогда S_{ab} содержит хотя бы k вершин, что не так. Противоречие.

Значит, $\mathrm{Int}(A_1) = \{a_1, x\}$ (см. рисунок 6.8c). В этом случае мы имеем $e_k \ge k - 1$ (столько рёбер ведет от x до вершин из S). Если утверждение леммы не выполнено, то других рёбер в E_k нет, а граф G_{k+1} имеет одну компоненту связности, то есть, G_{k+1} — дерево.

Остается проанализировать последний случай. В этом случае все рёбра из E_k соединяют вершину $x \in \mathrm{Int}(A_1)$ с вершинами множества S. Отметим, что в $\mathrm{N}_G(x)$ нет отличных от a_1 вершин из V_{k+1}.

3. *Докажем, что все рёбра графа G_{k+1}, входящие в кривые разрезы — это рёбра некоторого простого пути $Q = a_1a_2\dots a_n$, причем $n \le \frac{k-1}{2}$, а все внутренние вершины этого пути имеют степень 2 в графе G_{k+1}.* Пусть $c_1c_2 \in E(G_{k+1})$, $S_{c_1c_2} \in \mathfrak{R}$ — кривой разрез,

$$c_1 \in C_1 \in \mathrm{Part}(S_{c_1c_2}) \quad \text{и} \quad |\mathrm{Int}(C_1)| < \frac{k}{2}.$$

Рассмотрим любой путь в графе G_{k+1} от c_1 до некоторой висячей вершины a'_1, не проходящий через c_2 (см. рисунок 6.9a). Пусть $a'_2a'_1$ — последнее ребро этого пути,

$$S_{a'_1a'_2} \in \mathfrak{R}, \quad a'_1 \in \mathrm{Int}(A'_1) \in \mathrm{Part}(S_{a'_1a'_2}).$$

Тогда по лемме 6.2 мы имеем $|\mathrm{Int}(A'_1)| < |\mathrm{Int}(C_1)| < \frac{k}{2}$.

Пусть $a'_1 \ne a_1$. Проведем рассуждения, аналогичные сделанному в пунктах 1 и 2, для части A'_1. Мы найдем не менее чем $k-1$ ребер из E_k в части A'_1. Мы рассматриваем случай, когда $e_k = k-1$. Поэтому, в части A'_1 ровно $k-1$ ребро из E_k, но тогда все эти рёбра инцидентны смежной с a'_1 вершине x'. Очевидно, $x' \ne x$. Тогда E_k содержит хотя бы k рёбер: это $k-1$ ребер, инцидентных вершине x и хотя бы одно отличное от них ребро, инцидентное x'. В этом случае утверждение леммы доказано.

Сказанное выше означает, что все рёбра графа G_{k+1}, входящие в кривые разрезы — это рёбра некоторого простого пути $Q = a_1a_2\dots a_n$, причем все внутренние вершины этого пути имеют степень 2 в графе G_{k+1}. Пусть

$$a_ia_{i+1} \in S_i \in \mathfrak{R}, \quad a_i \in A_i \in \mathrm{Part}(S_i).$$

По лемме 6.2, тогда

$$2 = |\mathrm{Int}(A_1)| < |\mathrm{Int}(A_2)| < \dots < |\mathrm{Int}(A_{n-1})| \le \frac{k-1}{2}.$$

Следовательно, $n \le \frac{k-1}{2}$.

4. *Пусть E — множество всех рёбер графа G_{k+1}, кроме рёбер пути Q.*

Рассмотрим два случая.

4.1 $E \ne \varnothing$.

По лемме 6.6 можно выбрать попарно независимые разрезы $S_e \in \mathfrak{R}$ для всех рёбер $e \in E$. Пусть $d_1d_2 \in E(G_{k+1})$, причем d_1 — отличная от a_1 висячая вершина дерева G_{k+1}, а $d_1 \in D_1 \in \mathrm{Part}(S_{d_1d_2})$.

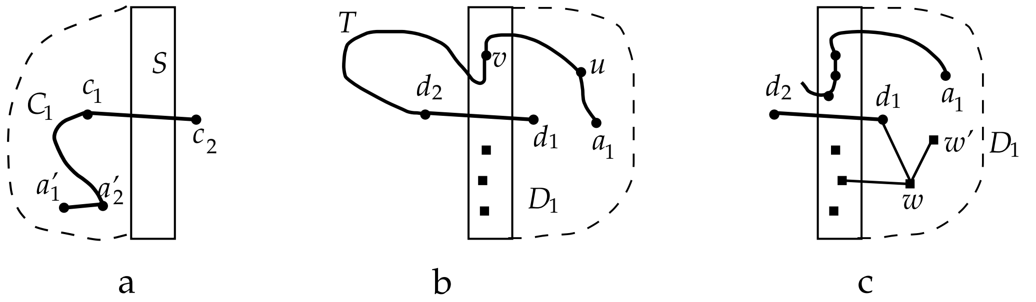


Рис. 6.9: Путь $a_1 \dots a_n$ и кривые разрезы.

Предположим, что $v \in S_{d_1d_2} \cap V_{k+1}$ (см. рисунок 6.9b). По лемме 6.8, путь от v до d_2 по дереву G_{k+1} должен содержать хотя бы одно ребро пути Q. Значит, одна из внутренних вершин P принадлежит Q — пусть это a_i. Лист a_1 не может лежать на пути от P, а все внутренние вершины P имеют в G_{k+1} степень 2. Следовательно, a_iPv — участок пути Q, причем $v = a_j$, где $j < i$. Выбрав последнюю на пути P вершину $V' \in D_1$, мы аналогичными рассуждениями получим, что хотя бы одна из вершин $a_1, \dots, a_n$ лежит в $\mathrm{Int}(D_2)$.

Пусть $u \in \mathrm{Int}(D_1) \cap V_{k+1}$. В этом случае путь от u до d_2 по дереву G_{k+1} должен проходить через вершину разреза $S_{d_1d_2}$, а тогда, как показано выше, этот путь содержит ребро пути Q. Следовательно, $u \in \{a_1, \dots, a_n\}$ и хотя бы одна из вершин $a_1, \dots, a_n$ лежит в $\mathrm{Int}(D_2)$.

Таким образом, все вершины из $D_1 \cap V_{k+1}$, кроме d_1, принадлежат множеству $\{a_1, \dots, a_n\}$, но хотя бы одна из вершин пути Q не лежит в D_1. Следовательно,

$$|V_{k+1} \cap D_1| \le n \le \frac{k-1}{2}. \tag{6.6}$$

4.2. $E = \varnothing$.
В этом случае $G_{k+1} = Q$, а a_n — висячая вершина графа G_{k+1}. Пусть $d_1 = a_n$, а $D_1 \in \mathrm{Part}(S_{n-1})$ — часть, содержащая a_n. Так как $a_{n-1} \notin D_1$, и в этом случае выполняется неравенство (6.6).

Продолжим рассуждения для обоих случаев. Вершина $d_1 \in \mathrm{Int}(D_1)$ — висячая в дереве G_{k+1}, и потому смежна с k вершинами из $V_k \cap D_1$, среди которых есть вершина $w \in \mathrm{Int}(D_1)$ (см. рисунок 6.9c). Поскольку $d_1 \neq a_1$, то $x \neq w$. Вершина w смежна с k вершинами из D_1. Из неравенства (6.6) следует, что в $\mathrm{N}_G(w)$ есть хотя бы

$$k - |V_{k+1} \cap D_1| \ge k - n \ge \frac{k+1}{2} > 1$$

вершин степени k, среди которых можно найти вершину $w' \neq x$ (см. рисунок 6.9c). Тогда ребро ww' дает нам $e_k \geq k$ и завершает доказательство леммы. $\square$

6.1.5 Доказательство теорем 6.1 и 6.2

Мы считаем, что $k > 1$, иначе доказательства обоих теорем очевидны. Напомним, что по лемме 6.3 утверждение теоремы 6.1 эквивалентно неравенству $e_k + c \geq k$. По следствию 6.3 минимальный k-связный граф G может быть экстремальным (именно о таких графах идет речь в теореме 6.2) только при $e_k + c \leq k$.

Лемма 6.10. *В следующих двух случаях утверждения теорем 6.1 и 6.2 выполнены:*

1) $E_{k+1} = \varnothing$*;*

2) $E_{k+1} \neq \varnothing$*, в* $\mathfrak{R}$ *есть кривые разрезы.*

Доказательство. 1) Тогда $v_{k+1} = c$. Пусть $c < k$. Тогда любая вершина $x \in V_k$ смежна хотя бы с $k - v_{k+1}$ вершинами степени k, откуда легко понять, что

$$e_k \geq \frac{v_k(k - v_{k+1})}{2} > k - v_{k+1}.$$

(Мы воспользовались тем, что $v_k \geq k + 1 > 2$.) Таким образом, в этом случае $e_k + c > k$, а значит, теорема 6.1 доказана. Граф G в этом случае не является экстремальным.

При $c \geq k$ теорема 6.1 доказана. Граф G может быть экстремальным лишь в случае $c = k$, $e_k = 0$. Тогда наш граф представляет собой k попарно несмежных вершин степени $k+1$, с каждой из которых смежны $k+1$ попарно несмежных вершин степени k. Это граф $K_{k,k+1}$, который равен $G_{k,T}$ для одновершинного дерева T. В этом случае утверждение теоремы 6.2 выполнено.

2) По лемме 6.9 в этом случае $e_k + c > k$. Значит, утверждение теоремы 6.1 выполнено, а граф G не является экстремальным. $\square$

Далее мы считаем, что $E_{k+1} \neq \varnothing$, а рёбра из E_{k+1} не входят в кривые разрезы. Тогда по лемме 6.6 для каждого ребра $e \in E_{k+1}$ мы построим разрез $S_e \ni e$ так, чтобы эти разрезы были попарно независимы. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество построенных разрезов.

Введем необходимые обозначения. Пусть

$$\mathcal{A} = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} \mathrm{Part}(S),$$

а $A_1, \dots, A_n$ — все минимальные по включению части из $\mathcal{A}$. Очевидно, $n \ge 2$. Пусть $S_i \in \mathfrak{S}$ — отделяющий часть A_i разрез из $\mathfrak{S}$,

$$R_i = A_i \cap W(S_i), \quad p_i = |R_i \cap V_k|, \quad B_i = A_i \setminus R_i.$$

Пусть $a_i \in \mathrm{Int}(A_i)$ — конец ребра из E_{k+1}, входящего в разрез S_i (см. рисунок 6.10a). Тогда $\{a_i\} = \mathrm{Int}(A_i) \cap R_i$.

Изучим свойства частей A_i.

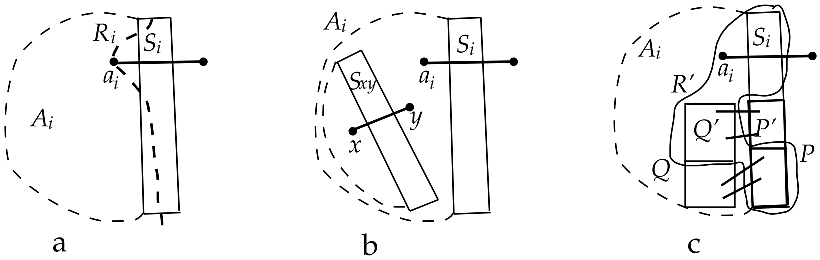


Рис. 6.10: Часть A_i.

Лемма 6.11. *Выполняются следующие утверждения.*

1) $B_i \neq \varnothing$, *множество* R_i *отделяет* B_i *от остальных вершин графа. Каждая вершина из* R_i *смежна хотя бы с одной вершиной из* B_i.

2) *Если* $x \in B_i \cap V_{k+1}$, *то* $\{x\}$ *— компонента связности графа* G_{k+1}.

3) *Пусть* c_i *— это количество лежащих в* B_i *одновершинных компонент связности графа* G_{k+1}, *а* $e_{k,i}$ *— это количество инцидентных вершинам из* B_i *рёбер из* E_k. *Тогда* $c_i + e_{k,i} \ge p_i$.

Доказательство. 1) Так как разрез S_i нормален, $|\mathrm{Int}(A_i)| > 1$, а значит, $B_i = \mathrm{Int}(A_i) \setminus \{a_i\} \neq \varnothing$. Тогда R_i отделяет B_i от остальных вершин графа G. Из $|R_i| = k$ и k-связности графа G следует, что каждая вершина множества R_i смежна хотя бы с одной вершиной из B_i.

2) Предположим, что $y \in V_{k+1}$ и $xy \in E(G)$. Тогда $y \in A_i$, $xy \in E_{k+1}$. Рассмотрим разрез $S_{xy} \in \mathfrak{S}$ (см. рисунок 6.10b). Из независимости разрезов S_i и S_{xy} и минимальности части A_i следует, что одна из частей $\mathrm{Part}(S_{xy})$ должна содержать A_i, что, очевидно, невозможно: вершины $x, y \in A_i$ лежат в разных частях $\mathrm{Part}(S_{xy})$. Противоречие завершает доказательство.

3) Пусть P — множество всех входящих в R_i вершин степени k, а Q — множество всех смежных с P вершин из B_i. Пусть $V_{k+1} \cap Q = Q'$, а P' — множество всех вершин из P, смежных в $\mathrm{Int}(A_i)$ только с вершинами из Q'. Напомним, что $|P| = p_i$.

Тогда $c_i \geq |Q'|$ по пункту 2. Каждая вершина из $P \setminus P'$ смежна с вершиной степени k из множества Q, откуда $e_{k,i} \geq |P| - |P'|$. Если $|P'| \leq |Q'|$, то мы получаем, что $e_{k,i} + c_i \geq p_i$, что нам и нужно.

Остается случай, когда $|P'| > |Q'|$. Предположим, что $B_i \neq Q'$. Тогда множество $R' = (R \setminus P') \cup Q'$ состоит менее чем из k вершин и отделяет непустое множество $B_i \setminus Q'$ от остальных вершин графа G (см. рисунок 6.10c). В k-связном графе такое невозможно. Следовательно,

$$Q' = B_i \neq \varnothing.$$

Как мы знаем из пункта 2, каждая вершина из Q' может быть смежна только с вершинами из $A_i \cap V_k$, а это в нашем случае только вершины множества P. Но $|P| < k$, противоречие. □

Лемма 6.12. *Пусть* $p_1 = \min(p_1, \dots p_n)$. *Тогда* $c + e_k \geq k + p_1$.

Доказательство. По лемме 6.8 вершины из $V_{k+1} \cap (\cup_{i=1}^{n} R_i)$ входят хотя бы в $k - p_1$ различных компонент связности графа G_{k+1}. Если $p_1 > 0$, то в силу леммы 6.11 мы имеем

$$c + e_k \geq (k - p_1) + \sum_{j=1}^{n} p_j \geq k - p_1 + 2p_1$$

□

Доказательство теоремы 6.1. По лемме 6.12 мы имеем $e_k + c \geq k$, откуда по лемме 6.3 следует утверждение теоремы. □

Вернемся к доказательству теоремы 6.2. Итак, пусть $p_1 = \min(p_1, \dots p_n)$. Если $p_1 \geq 1$, то по лемме 6.12 мы имеем $c + e_k \geq k + 1$, что противоречит следствию 6.3. Остается рассмотреть последний, самый интересный случай $p_1 = 0$. В этом случае по лемме 6.8 все k вершин из R_1 принадлежат разным компонентам связности графа G_{k+1}, откуда следует, что $c = k$. Пусть $U_1, \dots, U_k$ — компоненты связности графа G_{k+1}, тогда $T_i = G(U_i)$ — деревья. По следствию 6.3 мы имеем $e_k = 0$, то есть, никакие две вершины степени k в графе G не смежны.

Мы будем предполагать, что для любого меньшего чем G экстремального минимального k-связного графа утверждение теоремы доказано.

Лемма 6.13. *Пусть* $x \in V_k(G)$. *Тогда* $\mathrm{N}_G(x)$ *содержит по одной вершине каждого из деревьев* $T_1, \dots, T_k$.

Доказательство. Пусть x смежна с вершинами y_1 и y_m одного дерева T_ℓ, а $y_1y_2\dots y_m$ — путь в T_ℓ между ними. Пусть

$$S_{y_1y_2} \in \mathfrak{S}, \quad \mathrm{Part}(S_{y_1y_2}) = \{Y_1, Y_2\}, \quad Y_1 \ni y_1 \quad \text{и} \quad Y_2 \ni y_2.$$

По лемме 6.7 мы знаем, что $\mathrm{N}_G(y_m) \subset Y_2 \cup \{y_1\}$, откуда следует $x \in Y_2$. Поскольку $y_1 \in \mathrm{Int}(Y_1)$, мы имеем $x \in S_{y_1y_2}$ (см. рисунок 6.11).

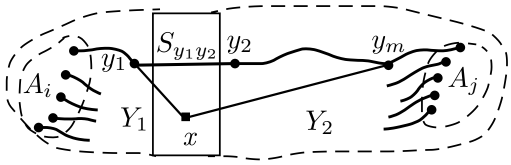


Рис. 6.11: Вершина x смежна с двумя вершинами одного дерева.

Разрез $S_{y_1y_2}$ разделяет какие-то две минимальные части A_i и A_j, а их границы, как доказано выше, содержат по вершине каждого из деревьев T_1, $\dots$, T_k. Значит, и $S_{y_1y_2}$ должен содержать по вершине каждого из этих деревьев, кроме T_ℓ, то есть, не может содержать вершину x, противоречие. $\square$

По лемме 6.8 каждое из деревьев $T_1, \dots, T_k$ содержит ровно по одной вершине множества R_1. Пусть $R_1 = \{b_1, \dots, b_k\}$, причем $b_i \in V(T_i)$. Одна из этих вершин совпадает с a_1 — концом входящего в разрез S_1 ребра. Будем считать, что $b_1 = a_1$.

Пусть $x \in B_1 \cap V_{k+1}$. По Лемме 6.11 тогда x — компонента графа G_{k+1}, но в этом случае $c > k$ и граф G не является экстремальным, противоречие. Значит, $B_1 \subset V_k$.

Пусть $b_1b_1' \in S_1$ и $N_1 = \mathrm{N}_G(b_1) \setminus \{b_1'\}$. Так как $b_1 \in \mathrm{Int}(A_1)$, мы имеем $N_1 \subset A_1$. Так как вершины из R_1 попарно несмежны в силу Леммы 6.8, $N_1 \subset B_1$. Следовательно, $|B_1| \ge k$.

Так как $e_k = 0$, каждая вершина из B_1 должна быть смежна с k вершинами из $V_{k+1} \cap A_1 = R_1$. Но таких вершин ровно k. Следовательно, $G(B_1 \cup R_1)$ — это полный двудольный граф с долями B_1 и R_1.

По замечанию 6.2 $\Delta(G) = k+1$. Следовательно, $k \le |B_1| \le k+1$. Если $|B_1| = k+1$, то $G \simeq K_{k,k+1} = G_{k,T}$ для одновершинного дерева T (что нас устраивает). Далее мы рассмотрим случай $|B_1| = k$ (см. рисунок 6.12a).

Тогда $d_{T_i}(b_i) \le 1$. для всех $i \in \{1, \dots, k\}$. Если $d_{T_i}(b_i) = 0$, то по лемме 6.13 все вершины из V_k смежны с b_i, значит, их ровно $k+1$. Из теоремы 6.1 тогда следует, что $v(G) = 2k-1$, откуда $|V_{k+1}| = k$ и опять $G \simeq K_{k,k+1}$.

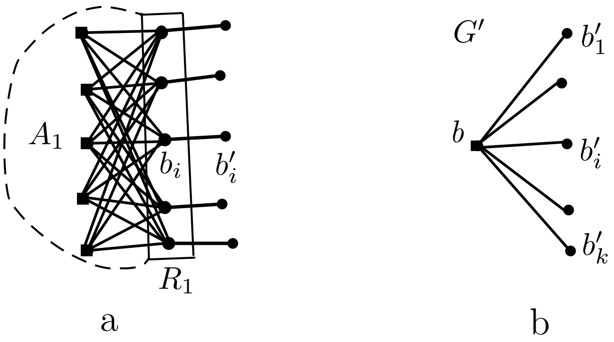


Рис. 6.12: Часть A_1 и граф G'.

Далее разберем случай, когда для всех $i \in \{1, \dots, k\}$ вершина b_i — висячая в дереве T_i. Пусть $b_i b'_i \in E(T_i)$ — единственное инцидентное b_i ребро дерева T_i. Тогда все вершины $b'_1, \dots, b'_k$ различны (так как деревья $T_1, \dots, T_k$ различны).

Построим новый граф G', добавив к графу $G - R_1 - B_1$ новую вершину b степени k с $\mathrm{N}_{G'}(b) = \{b'_1, \dots, b'_k\}$ (см. рисунок 6.12b). Пусть $T'_i = T_i - b_i$. Отметим, что

$$v_k(G') = v_k(G) - k + 1, \quad v(G') = v(G) - 2k + 1. \qquad (6.7)$$

Лемма 6.14. *G' — минимальный k связный граф.*

Доказательство. 1. *Докажем, что граф G' — k-связный.*
Предположим, что G' имеет разделяющее множество Q из менее чем k вершин. Тогда Q не содержит ни одной вершины какого-то из деревьев $T'_1, \dots, T'_k$. Пусть $Q \cap V(T'_1) = \varnothing$, а U — компонента связности графа $G' - Q$, содержащая все вершины дерева T'_1.

Пусть $x \in V_k(G') \setminus Q$, $x \neq b$. Тогда по лемме 6.13 вершина x соединена ребром с деревом T'_1, следовательно, $x \in U$. Если $b \notin Q$, то вершина b также принадлежит U (так как смежна с T'_1).

Пусть $x \in V_{k+1}(G') \setminus Q$, $x \notin U$. Можно считать, что $x \in V(T'_2)$. Если $d_{T'_2}(x) = 1$, то x смежна с k различными вершинами $z_1, \dots, z_k \in V_k$. Так как $V_k(G') \setminus Q \subset U$, а $x \notin U$, должно быть $Q \supset \{z_1, \dots, z_k\}$, что невозможно.

Значит, $d_{T'_2}(x) = m \geq 2$. Тогда в дереве T'_2 существуют m непересекающихся путей от x до различных листьев $y_1, \dots, y_m$. Каждая вершина y_i смежна в графе G' с вершиной $z_i \in V_k(G')$. Кроме того, вершина x смежна в G' с вершинами $z_{m+1}, \dots, z_{k+1} \in V_k(G')$ (см. рисунок 6.13a). По лемме 6.13 все вершины $z_1, \dots, z_{k+1}$ различны. Так как $V_k(G') \setminus Q \subset U$, а $x \notin U$, для каждого $i \in \{1, \dots, k+1\}$ множество Q должно содержать либо z_i, либо внутреннюю вершину xz_i-пути по дереву T_2'. Но тогда $|Q| \geq k+1$, противоречие.

Таким образом, $U \supset V(G' - Q)$, то есть, граф $G' - Q$ связен. Полученное противоречие завершает доказательство.

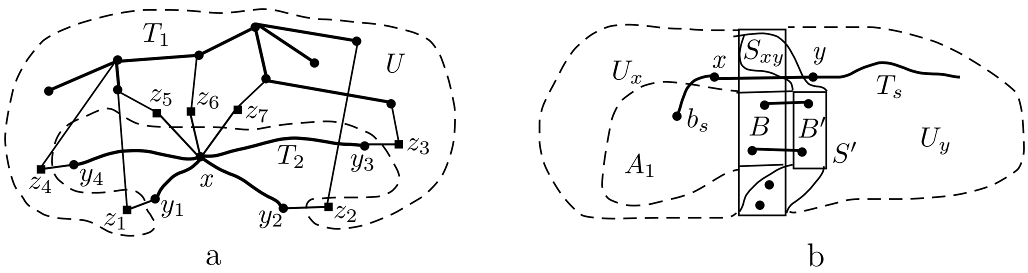


Рис. 6.13: Разрезы S_x и S'.

2. *Докажем, что граф G' — минимальный.*

Пусть $xy \in E(G')$. Если хотя бы один из концов этого ребра имеет в G' степень k, то граф $G' - xy$ не является k-связным. Остается рассмотреть случай, когда $xy \in E_{k+1}(G')$.

Не умаляя общности положим $xy \in E(T_s')$. Рассмотрим разрез $S_{xy} \in \mathfrak{S}$ графа G, он делит G на две части $U_x \ni x$ и $U_y \ni y$ (см. рисунок 6.13b). Так как разрезы в $\mathfrak{S}$ независимы, а часть A_1 — минимальная по включению в $\mathcal{A}$, можно считать, что $A_1 \subset U_x$. Если $S_{xy} \cap R_1 = \varnothing$, то S_{xy} — разрез графа G', отделяющий U_y от $(U_x \setminus A_1) \cup \{b\}$.

Пусть
$$B = R_1 \cap S_{xy} \quad \text{и} \quad B' = \{b_i' \,:\, b_i \in B\}.$$
Так как $xy \in E(G')$ и $b_s \notin V(G')$, мы имеем $x \neq b_s$. По Лемме 6.8 $b_s \notin B$. Для каждой вершины $b_i \in B$ в части U_y должна быть вершина, смежная с b_i, но такая вершина может быть только одна — это b_i'. Следовательно, $S' = (S_{xy} \setminus B) \cup B'$ — разрез графа G с
$$\mathrm{Part}(G; S') = \{U_x \cup B',\ U_y \setminus B\}.$$
Тогда S' — разрез графа G' с $\mathrm{Part}(G'; S') = \{(U_x \cup B' \cup \{b\}) \setminus A_1),\ U_y \setminus B\}$ (эти части непусты, так как содержат x и y соответственно).

Таким образом, граф G' — минимальный. $\square$

Доказательство теоремы 6.2. Итак, рассмотрим минимальный k-связный граф G'. Из
$$v_k(G) = \frac{(k-1)v(G) + 2k}{2k-1}$$

и равенств (6.7) следует, что

$$v_k(G') = \frac{(k-1)v(G') + 2k}{2k-1}.$$

По индукционному предположению $G' = G_{k,T'}$ для некоторого дерева T' с $\Delta(T') \le k+1$. Тогда $T'_1, \dots, T'_k$ — это копии дерева T'. Так как $b \in V_k(G')$ и $\mathrm{N}_{G'}(b) = \{b'_1, \dots, b'_k\}$, по построению графа $G_{k,T'}$ в дереве T' есть вершина b', которая при изоморфизме копий соответствует вершинам b'_1, $\dots$, b'_k. Напомним, что по замечанию 6.2 мы имеем $\Delta(G) = k+1$. Поэтому,

$$d_{T'}(b') = d_{T'_1}(b'_1) = d_{T_1}(b'_1) - 1 \le \Delta(G) - 1 = k. \tag{6.8}$$

Пусть дерево T получено из T' присоединением висячей вершины к b'. Из неравенства (6.8) следует, что $\Delta(T) \le k+1$. Вспомнив построение графа G' по графу G нетрудно понять, что $G = G_{k,T}$.

Теорема 6.2 полностью доказана. □

6.1.6 Алгоритм построения экстремальных минимальных k-связных графов

В 1982 Оксли представил алгоритм построения экстремальных минимальных двусвязных и трёхсвязных графов. Было доказано, что любой экстремальный минимальный двусвязный граф может быть получен из полного двудольного графа $K_{2,3}$ несколькими операциями замены вершины степени 2 на граф $K_{2,2}$, присоединенный к двум вершинам из окрестности заменяемой вершины. Там же доказано, что любой экстремальный минимальный трёхсвязный граф может быть получен из полного двудольного графа $K_{3,4}$ несколькими операциями замены вершины степени 3 на граф $K_{3,3}$. Из теоремы 6.2 несложно вывести аналогичный алгоритм построения всех экстремальных минимальных k-связных графов при произвольном k.

Следствие 6.4. *Пусть G — экстремальный минимальный k-связный граф. Тогда G может быть получен из $K_{k,k+1}$ серией операций замены вершины степени k на полный двудольный граф $K_{k,k}$ (в ходе операции добавляется паросочетание, соединяющее k вершин одной доли $K_{k,k}$ с вершинами, входящими в окрестность заменяемой вершины степени k).*

Доказательство. Отметим, что граф $K_{k,k+1}$ — это граф $G_{k,T}$ для одновершинного дерева T.

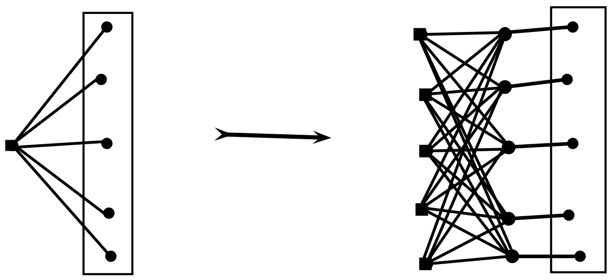


Рис. 6.14: Операция замены вершины степени k на граф $K_{k,k}$.

Пусть $G_{k,T}$ — экстремальный минимальный k-связный граф, $v(T) > 1$, a — висячая вершина дерева T, а $a_1, \dots, a_k$ — соответствующие a вершины в копиях дерева T, на которых построен граф $G_{k,T}$. Тогда по построению этого графа он содержит полный двудольный граф $K_{k,k}$, одна доля которого — это $\{a_1, \dots, a_k\}$, а другая — это k присоединенных к ним вершин степени k.

Пусть a'_i — единственная вершина дерева T_i, смежная с a_i. Произведем операцию, обратную к описанной в формулировке следствия: заменим найденный подграф $K_{k,k}$ на новую вершину b степени k, смежную с $a'_1, \dots, a'_k$. Легко видеть, что мы получили граф $G_{k,T'}$ где $T' = T - a$, то есть, из дерева T мы удалили висячую вершину. Понятно, что в результате таких операций дерево станет одновершинным, а значит, наш k-связный граф превратится в $K_{k,k+1}$. $\square$

6.2 Структура минимальных k-связных графов при $k \leq 5$

В теореме 6.2 показано, что при произвольном k экстремальные минимальные k-связные графы имеют древовидную структуру. При $k \leq 5$ мы можем построить аналогичную структуру для любого минимального k-связного графа. Основным результатом раздела является следующая теорема.

Теорема 6.4. *Пусть $k \leq 5$, а G — минимальный k-связный граф. Тогда для каждого ребра $e \in E_{k+1}$ можно выбрать содержащий e разрез $S_e \in \mathfrak{R}$ так, что все выбранные разрезы попарно независимы.*

Покажем, как применяется эта теорема. Пусть G — минимальный k-связный граф, а множество

$$\mathfrak{C} = \{S_e\}_{e \in E_{k+1}} \subset \mathfrak{R}, \quad \text{где} \quad e \in S_e$$

состоит из попарно независимых разрезов.

Для набора из попарно независимых разрезов $\mathfrak{C}$ можно определить деревья $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{C})$ и $\mathrm{PT}(G,\mathfrak{C})$. Эти деревья показывают взаимное расположение разрезов множества $\mathfrak{C}$ и частей из $\mathrm{Part}(\mathfrak{C})$. Существует взаимно однозначное соответствие между рёбрами дерева $\mathrm{PT}(G,\mathfrak{C})$ и рёбрами из E_{k+1}. Поэтому, деревья $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{C})$ и $\mathrm{PT}(G,\mathfrak{C})$ показывают также структуру взаимного расположения рёбер из множества E_{k+1}. Кроме того, для изучения структуры минимального k-связного графа теперь можно использовать многочисленные свойства, доказанные в теореме 4.3 и следствии 4.1.

Также мы докажем ряд свойств частей $\mathrm{Part}(\mathfrak{C})$, использующих минимальность графа G. Частным случаем леммы 6.6 является следующее утверждение.

Следствие 6.5. *Пусть $k \le 5$, а G — минимальный k-связный граф. Пусть R — граница разреза $S_e \in \mathfrak{C}$. Тогда все вершины из $V_{k+1} \cap R$ принадлежат разным компонентам связности графа G_{k+1}.*

Следствие 6.6. *Пусть $k \le 5$, G — минимальный k-связный граф, $\mathfrak{C}$ — определенное выше множество разрезов, а $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{C})$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Вершины множества $A \cap V_{k+1}$ попарно несмежны.*

2) *Пусть A — крайняя часть, смежная в $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{C})$ с разрезом S_{ab}. Тогда $A \in \mathrm{Part}(S_{ab})$. Часть A содержит не менее чем k вершин степени k, хотя бы одна из них принадлежит $\mathrm{Int}(A)$, а вершина a — лист леса G_{k+1}.*

Доказательство. 1) Если вершины $x, y \in A \cap V_{k+1}$ смежны, то разрез $S_{xy} \in \mathfrak{C}$ разделяет две вершины части $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{C})$, что невозможно.

2) По пункту 4 теоремы 4.3 мы имеем $A \in \mathrm{Part}(S_{ab})$. Пусть $a \in \mathrm{Int}(A)$. Тогда $\mathrm{N}_G(a) \setminus \{b\} \subset A$.

Предположим, что $ax \in E_{k+1}$, $x \ne b$. По следствию 6.5 мы знаем, что $x \notin \mathrm{Bound}(A)$. Следовательно, $x \in \mathrm{Int}(A)$. Теперь рассмотрим разрез S_{ax}, пусть $x \in X \in \mathrm{Part}(S_{ax})$. Тогда $\mathrm{Int}(X) \cap \mathrm{Int}(A) \ni x$, но $\mathrm{Int}(X) \not\ni a$. Из независимости разрезов S_{ax} и S_{ab} следует, что $X \subsetneq A$, что противоречит пункту 3 теоремы 4.3.

Таким образом, вершина a смежна с k вершинами части A и все эти вершины имеют степень k. Так как S_{ab} содержит не более $k-1$ вершины, хотя бы одна из смежных с a вершин степени k лежит в $\mathrm{Int}(A)$. $\square$

Оставшаяся часть раздела будет посвящена доказательству теоремы 6.4. Мы будем вести разговор о минимальном k-связном графе G и использовать для него обозначения, введенные в начале главы.

Поскольку граф G минимален, то для каждого ребра $e \in E_{k+1}$ существует разрез, содержащий e и $k-1$ вершину. Пусть $\mathfrak{R}$ — множество всех таких разрезов.

Изучим свойства разрезов из $\mathfrak{R}$.

6.2.1 Хорошие и плохие пары зависимых разрезов

Нам потребуется несколько вспомогательных определений.

Замечание 6.3. Отметим, что на этот раз, исходя из специфики работы с k-связными графами при $k \leq 5$, мы определим кривые и нормальные разрезы иначе, чем это было сделано для произвольного k в разделе 6.1.3.

Определение 6.4. 1) Назовем разрез $S \in \mathfrak{R}$ *кривым*, если существует часть $A \in \mathrm{Part}(S)$ с $|\mathrm{Int}(A)| \leq 2$ и *нормальным*, если такой части не существует.

2) Назовем упорядоченную пару зависимых разрезов (S, T) из $\mathfrak{R}$ *плохой*, если существует такая часть $A \in \mathrm{Part}(S)$, что $\mathrm{Int}(A) \subset T$.

3) Назовем неупорядоченную пару разрезов S, T из $\mathfrak{R}$ *хорошей*, если обе упорядоченные пары (S, T) и (T, S) не являются плохими.

Для пары зависимых разрезов мы будем использовать обозначения (6.2). Мы докажем две технические леммы, в целом аналогичные лемме 6.4, но учитывающие специфику работы с кривыми разрезами.

Лемма 6.15. *Пусть пара зависимых разрезов S, T из $\mathfrak{R}$ — хорошая, ребро $b_1b_2 \in T$ не принадлежит разрезу S. Тогда существуют такие $i, j \in \{1, 2\}$, что $R_{i,j} \ni b_1b_2$ — разрез.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Int}(G_{1,1}) \neq \varnothing$, $\mathrm{Int}(G_{2,2}) \neq \varnothing$. Тогда из леммы 6.1 следует, что $|R_{1,1}| = k = |R_{2,2}|$. Это, в частности, означает, что

$$R_{1,1} \cup R_{2,2} = S \cup T.$$

Не умаляя общности, положим $b_1b_2 \in R_{1,1}$. Тогда разрез $R_{1,1}$ нам подходит. Случай $\mathrm{Int}(G_{1,2}) \neq \varnothing$, $\mathrm{Int}(G_{2,1}) \neq \varnothing$ разбирается аналогично.

Пусть условия рассмотренных выше случаев не выполнены. Тогда не умаляя общности можно считать, что

$$\mathrm{Int}(G_{1,1}) = \mathrm{Int}(G_{1,2}) = \varnothing \quad \text{или} \quad \mathrm{Int}(G_{1,1}) = \mathrm{Int}(G_{2,1}) = \varnothing.$$

В первом случае $\mathrm{Int}(F_1) = T_1$, следовательно, пара (S, T) — плохая. Во втором случае $\mathrm{Int}(H_1) = S_1$, следовательно, пара (T, S) — плохая. В обоих случаях получаем противоречие. $\square$

Лемма 6.16. *Пусть $k \le 5$, а пара зависимых разрезов (S,T) из $\mathfrak{R}$ — плохая. Пусть $a_1a_2 \in S$ и $b_1b_2 \in T$ — различные рёбра из E_{k+1}. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1° Разрез S — кривой, а разрез T — нормальный.

2° Существуют такие $i, j \in \{1,2\}$, что $R_{i,j} \ni b_1b_2$ — разрез.

Доказательство. Не умаляя общности можно считать, что $\mathrm{Int}(F_1) \subset T$, то есть, $\mathrm{Int}(F_1) = T_1$. Тогда один из концов ребра $a_1a_2 \in S$ лежит в T_1. Пусть $a_1 \in T_1$ (см. рисунок 6.15a). Отметим, что $d_G(a_1) \ge k+1$ и все вершины, смежные с a_1, лежат в $T_1 \cup V(S) \cup \{a_2\}$. Следовательно, $|T_1| = t \ge 2$. Более того, вершина a_1 может быть несмежна не более чем с $t-2$ вершинами разреза S.

Так как $T = T_1 \cup T_2 \cup P \cup \{b_1b_2\}$, мы имеем

$$|T_2|+|P| = k-t-1 \quad \text{и} \quad |R_{2,1}|+|R_{2,2}| \le |S|+2(|T_2|+|P|+|\{b_1b_2\}|) \le 3k-2t. \tag{6.9}$$

Рассмотрим два случая.

1. $t = 2$.
Тогда a_1 смежна со всеми $k-1$ вершинами разреза S. Предположим, что $b_1 \in S$ (см. рисунок 6.15b). Тогда $a_1b_1 \in E_{k+1}$, следовательно, $a_1b_1 \in T' \in \mathfrak{R}$. Пусть $A \in \mathrm{Part}(T')$ — часть, содержащая b_1. Из $a_1a_2 \in S$ следует, что $a_2 \notin S$, а значит, $b_1 \ne a_2$. Тогда $|\mathrm{Int}(A)| < |\mathrm{Int}(F_1)| = 2$ по лемме 6.2, а значит, $\mathrm{Int}(A) = \{b_1\}$. Следовательно, $d_G(b_1) \le k$, противоречие.

Значит, $b_1 \notin S$ и, аналогично, $b_2 \notin S$. Тогда можно считать, что

$$b_1 \in \mathrm{Int}(G_{2,1}) \quad \text{и} \quad b_2 \in \mathrm{Int}(G_{2,2})$$

(см. рисунок 6.15a). В этом случае $|R_{2,1}| \ge k$ и $|R_{2,2}| \ge k$. Из $k \le 5$ и неравенства (6.9) следует, что $|R_{2,1}| = k$ или $|R_{2,2}| = k$ (пусть выполнено первое равенство). Тогда $R_{2,1} \in \mathfrak{R}$ — разрез, содержащий ребро b_1b_2. Таким образом, $R_{2,1}$ удовлетворяет требованиям пункта 2.

Так как $|\mathrm{Int}(F_1)| = 2$, разрез S — кривой. Осталось доказать, что разрез T нормален. Докажем, что $|\mathrm{Int}(H_1)| \ge 3$. Как мы знаем, $b_1 \in \mathrm{Int}(G_{2,1})$ и $d_G(b_1) \ge k+1$. Не более двух рёбер может выходить из b_1 в вершины не из $G_{2,1}$: это ребро b_1b_2 и, в случае, когда $a_2 = b_1$, ребро b_1a_1. Учитывая саму вершину b_1, получаем $|G_{2,1}| \ge k$. При этом,

$$|G_{2,1} \cap T| = |T_2 \cup P| \le k-3$$

по неравенству (6.9). Значит, $|\mathrm{Int}(H_1)| \ge |G_{2,1} \setminus T| \ge 3$. Аналогично, $|\mathrm{Int}(H_2)| \ge 3$ и разрез T — нормален.

2. $t \ge 3$.

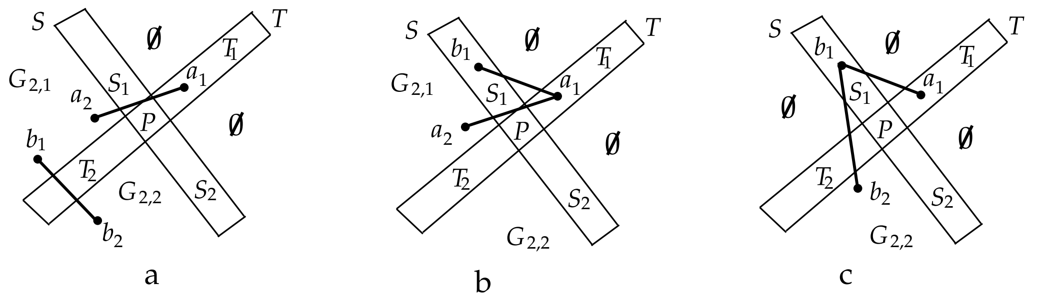


Рис. 6.15: Разбиение графа парой зависимых разрезов.

По неравенству (6.9), тогда $|R_{2,1}| + |R_{2,2}| < 2k$, а значит, можно считать, что $|R_{2,1}| < k$. В этом случае $\mathrm{Int}(G_{2,1}) = \varnothing$ и $\mathrm{Int}(H_1) = S_1$. Тогда один из концов ребра b_1b_2 лежит в S_1, пусть это b_1.

Предположим, что вершины b_1 и a_1 смежны (см. рисунок 6.15c). Тогда $a_1b_1 \in E_{k+1}$, следовательно, $a_1b_1 \in T' \in \mathfrak{R}$. Пусть $A \in \mathrm{Part}(T')$ — часть, содержащая a_1. Аналогично пункту 1, из $a_1 \in T$ следует, что $a_1 \neq b_2$. Тогда по лемме 6.2 мы имеем $|\mathrm{Int}(A)| < |\mathrm{Int}(H_1)|$. Как доказывалось выше, $|\mathrm{Int}(A)| \geq 2$, следовательно, $|S_1| = |\mathrm{Int}(H_1)| \geq 3$.

Пусть вершины b_1 и a_1 несмежны. Так как $d_G(b_1) \geq k+1$, а все вершины, смежные с b_1, лежат в $S_1 \cup (V(T) \cup \{b_2\})$, мы и в этом случае получаем $|S_1| \geq 3$.

Множество $R_{2,2}$ включает в себя вершины из P, S_2, T_2 и не более чем два ребра. Таким образом, во всех случаях,

$$|R_{2,2}| \leq (|S_2| + |P| + 1) + (|T_2| + 1) \leq (k - |S_1|) + (k - |T_1|) \leq 2k - 6 < k,$$

а значит, $\mathrm{Int}(G_{2,2}) = \varnothing$. Но тогда $b_2 \in S_2$ и аналогично доказанному выше мы имеем $|S_2| \geq 3$, что невозможно. $\square$

6.2.2 Доказательство теоремы 6.4

Опишем алгоритм построения искомого множества попарно независимых разрезов. Нам понадобятся два счетчика p и q. Изначально положим

$$p = q = 0.$$

Шаг алгоритма.

1. Выбор ребра e.
Пусть перед шагом имеются попарно независимые разрезы: кривые K_1, …, K_p и нормальные N_1, …, N_q (если $p = 0$ или $q = 0$, то соответствующих разрезов нет). Пусть $e_i \in K_i$, $f_j \in N_j$, причем e_1 ,…, e_p, f_1, …, f_q — различные рёбра из E_{k+1}. Положим

$$\mathfrak{S} = \{K_1, \dots, K_p, N_1, \dots, N_q\}, \quad E' = E_{k+1} \setminus \{e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q\}.$$

Если $E' = \varnothing$, алгоритм прекращает работу.

Пусть $E' \neq \varnothing$. Тогда рассмотрим ребро $e \in E'$, пусть $e \in T \in \mathfrak{R}$. Положим $\mathfrak{S}' = \varnothing$. *Мы будем по очереди рассматривать разрезы из* $\mathfrak{S}$*, совершать с ними последующие шаги, изменяющие разрез* T*, после чего добавлять рассмотренный разрез в множество* $\mathfrak{S}'$*.*

Перейдем к выбору разреза S.

2. Выбор разреза S.
Если разрез T — нормальный, то выберем любой разрез $S \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}'$ (если он существует). Если разрез T — кривой, то выберем любой кривой разрез $S \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}'$ (если он существует). В случаях, когда невозможно выбрать разрез S, мы перейдем к окончанию шага алгоритма.

Пусть мы смогли выбрать разрез S. Если разрезы S и T независимы, то мы поместим S в $\mathfrak{S}'$ и вернемся к выбору следующего разреза S. Если разрезы S и T зависимы, то мы перейдем к преобразованию разреза T.

3. Преобразование разреза T.
Пусть

$$\mathrm{Part}(T) = \{H_1, H_2\}, \quad \mathrm{Part}(S) = \{F_1, F_2\}, \quad G_{i,j} = F_i \cap H_j.$$

Мы хотим доказать существование такого разреза $R \in \mathfrak{R}$, что

$$R \ni e, \quad \mathrm{Part}(R) = \{G_{\alpha,\beta}, U\},$$

причем либо $U = \overline{G}_{\alpha,\beta}$, либо $U = \overline{G}_{\alpha,\beta} \cup \{a\}$, где a — конец ребра $e = ab$, лежащий в $G_{\alpha,\beta}$.

Если пара разрезов S, T — хорошая, то искомый разрез R существует по леммам 6.15 и 6.5. Предположим, что пара S, T — не является хорошей, тогда одна из упорядоченных пар (S, T) и (T, S) — плохая. Если пара (S, T) — плохая, то искомый разрез R существует по пункту 2 леммы 6.16 и лемме 6.5. Наконец, пусть пара (T, S) — плохая. Тогда по пункту 1 леммы 6.16 разрез T — кривой, а разрез S — нормальный, что противоречит выбору разреза S.

Докажем, что R независим с произвольным разрезом $S' \in \mathfrak{S}'$. Пусть $\mathrm{Part}(S') = \{D_1, D_2\}$. Так как разрезы S и S' независимы, разрезы T и S'

независимы, а разрезы S и T зависимы, по лемме 3.13 можно считать, что

$$F_1 \supset D_2, \quad F_2 \subset D_1, \quad H_1 \supset D_2, \quad H_2 \subset D_1. \tag{6.10}$$

Разберем несколько случаев.

a. $\alpha = 2$.
Тогда $G_{2,\beta} \subset F_2 \subset D_1$ и $U \supset \overline{G}_{2,\beta} \supset F_1 \supset D_2$ (см. рисунок 6.16a), то есть, R и S' независимы.

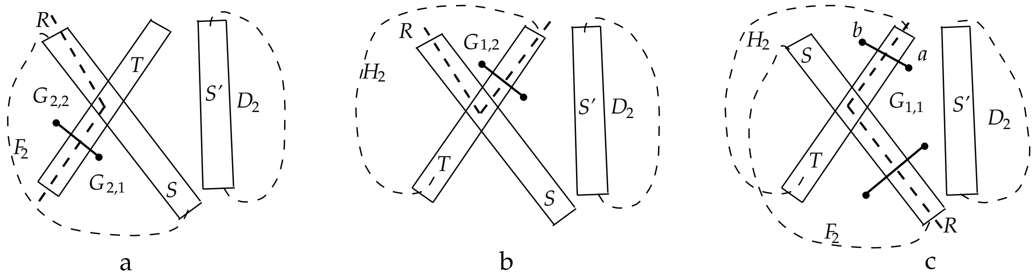


Рис. 6.16: Разрезы S, S' и T.

b. $\alpha = 1$. Разберем два подслучая.

b1. $\beta = 2$.
Тогда $G_{\alpha,\beta} = G_{1,2} \subset H_2 \subset D_1$ и $U \supset \overline{G}_{1,2} \supset H_1 \supset D_2$ (см. рисунок 6.16b), что означает независимость разрезов S' и R.

b2. $\beta = 1$.
В силу (6.10), мы имеем $D_1 \supset H_2 \cup F_2 = \overline{G}_{1,1}$ (см. рисунок 6.16c). Так как T и S' не имеют общих рёбер, по пункту 2 леммы 3.14 мы имеем $D_1 \supset W(T) \ni a$. Значит, $D_1 \supset \overline{G}_{1,1} \cup \{a\} \supset U$.

Из $D_1 \supset F_2$ и независимости разрезов S и S' следует $D_2 \cap \mathrm{Int}(F_2) = \varnothing$. Значит, $D_2 \subset H_1 \setminus \mathrm{Int}(F_2) = G_{1,1}$. Таким образом, мы проверили независимость разрезов S' и R.

Положим $T = R$, добавим S в $\mathfrak{S}'$ и вернемся к выбору следующего разреза S.

4. Окончание шага алгоритма.
Если разрез T — нормальный, то рассмотрены все разрезы из $\mathfrak{S}$ и T с ними независим. Тогда положим $N_{q+1} = T$, поместим этот разрез в $\mathfrak{S}$ и положим $q = q + 1$.

Пусть разрез T — кривой. Тогда рассмотрены все кривые разрезы из $\mathfrak{S}$ и T с ними независим. В этом случае положим $K_{p+1} = T$, поместим этот разрез в $\mathfrak{S}$ и положим $p = p + 1$. Кроме того, положим $q = 0$ и удалим все разрезы $N_1, \dots, N_q$ из $\mathfrak{S}$.

Вернемся к выбору следующего ребра e.

На этом описание шага алгоритма закончено.

В результате действия каждого шага алгоритма либо увеличится p, либо p не изменится и при этом увеличится q. Поэтому алгоритм обязательно закончит работу, в результате получится искомое множество попарно независимых разрезов.

На этом доказательство теоремы 6.4 закончено.

6.2.3 Циклы в минимальных графах

Теорема Халина 6.3 говорит нам, что в любом треугольнике минимального k-связного графа при $k \in \{2, 3\}$ есть хотя бы две вершины степени k. Халин доказал и более общую теорему, про цикл произвольной длины. Эта теорема оказывается несложным следствием изложенной выше теории.

Теорема 6.5. (R. Halin, 1969.) *Пусть G— минимальный k-связный граф, где $k \in \{2, 3\}$. Тогда любой цикл в графе G содержит хотя бы две вершины степени k.*

Доказательство. По следствию 6.1, граф G_{k+1} — лес, а значит, в каждом цикле минимального k-связного графа G существует хотя бы одна вершина из V_k. Остается лишь доказать, что не существует цикла, в котором такая вершина ровно одна.

Предположим противное, пусть $a_1a_2 \dots a_nx$ — цикл, в котором $x \in V_k$, а все остальные вершины лежат в V_{k+1}. Тогда $a_1a_2, \dots, a_{n-1}a_n \in E_{k+1}$. В силу теоремы 6.4 можно выбрать попарно независимые разрезы $S_1, \dots, S_{n-1} \in \mathfrak{R}$ так, что $a_ia_{i+1} \in S_i$.

Пусть $\mathrm{Part}(S_i) = \{A_i, B_{i+1}\}$, причем $a_i \in \mathrm{Int}(A_i)$ и $a_{i+1} \in \mathrm{Int}(B_{i+1})$. Отметим, что $x \in \mathrm{N}_G(a_1) \subset A_1 \cup \{a_2\}$. Пусть $R_1 = \mathbb{R}(A_1)$. Тогда из $d_G(a_1) \ge k+1$ и $|R_1| = k$ следует, что $A'_1 = A_1 \setminus R_1$ непусто.

По пункту 2 леммы 6.7 мы имеем $x \in \mathrm{N}_G(a_n) \subset B_2 \cup \{a_1\}$. Так как $x \in V_k$, а $a_1, a_2 \in V_{k+1}$, мы получаем, что $x \in A_1 \cap B_2 = V(S_1)$. Как мы знаем из замечания 3.5, тогда вершина $x \in V(S_1) \subset R_1$ смежна хотя бы с одной вершиной $y \in A'_1$.

Аналогично, доказывается, что x смежна хотя бы с одной вершиной $z \in B'_n = B_n \setminus \mathbb{R}(B_n)$. В силу пункта 1 леммы 6.7 мы имеем $B_n \subset B_2$, откуда следует, что

$$B_n \cap A_1 \subset B_2 \cap A_1 \subset V(S_1) \subset R_1.$$

Тогда из $A'_1 \subset A_1 \setminus R_1$ следует, что $A'_1 \cap B'_n \subset A'_1 \cap B_n = \varnothing$. Напомним, что вершины $a_1, a_n \in \mathrm{N}_G(x)$ не лежат ни в A'_1, ни в B'_n и потому отличны от y и z. Таким образом, $\mathrm{N}_G(x) \supset \{a_1, a_n, y, z\}$, а это четыре различные вершины. Противоречие с $d_G(x) = k \leq 3$. $\square$

Глава 7

Стягивание рёбер в k-связном графе

Определение 7.1. Назовём k-связный граф G *минимальным по стягиванию*, если для любого ребра $e \in E(G)$ граф $G \cdot e$ не является k-связным.

Не секрет, что в любом связном графе можно стянуть любое ребро без потери связности. При $k \in \{2, 3\}$ мы докажем, что единственным минимальным по стягиванию k-связным графом является K_{k+1}. Отметим, что в любом k-связном графе по определению хотя бы $k+1$ вершина, так что K_{k+1} во всех смыслах является минимальным k-связным графом.

При $k \geq 4$ существуют различные минимальные по стягиванию k-связные графы и чем больше k, тем сложнее их структура и тем меньше про них известно. В случае $k = 4$ мы опишем структуру минимальных по стягиванию k-связных графов.

7.1 Двусвязные и трёхсвязные графы

Теорема 7.1. *Пусть G — двусвязный граф, отличный от K_3. Тогда существует такое ребро $e \in E(G)$, что граф $G \cdot e$ двусвязен.*

Доказательство. Предположим, что это неверно. Так как $v(G) \geq 4$, тогда для любого ребра $ab \in E(G)$ множество $\{a, b\} \in \mathfrak{R}_2(G)$. Рассмотрим минимальный фрагмент H, отделяемый множеством такого вида, пусть $ab \in E(G)$, $A \in \mathrm{Part}(\{a, b\})$, $H = \mathrm{Int}(A)$. По лемме 3.1, существует вершина $c \in H$, смежная с a. Тогда $\{a, c\} \in \mathfrak{R}_2(G)$.

Очевидно, множества $\{a, b\}$ и $\{a, c\}$ независимы. Из $c \in H = \mathrm{Int}(A)$ по следствию 3.3 следует, что существует фрагмент $H' \subsetneq H$ с границей $\{a, c\}$ — противоречие с минимальностью H. $\square$

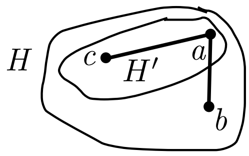


Рис. 7.1: Фрагменты H и H'.

Лемма 7.1. *Пусть G — k-связный граф, $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$, $A \in \mathrm{Part}(S)$, $T \supset \mathrm{Int}(A)$. Тогда множества S и T зависимы.*

Доказательство. Пусть S и T независимы, тогда $T \subset A$. Пусть $A' \in \mathrm{Part}(S)$, $A' \neq A$. Тогда $T \cap \mathrm{Int}(A') = \varnothing$ и из леммы 3.5 следует, что T не разделяет $A' \supset (S \setminus T)$. Тогда, поскольку $S \setminus T \neq \varnothing$, то T не разделяет $V(G) \setminus T \subset V(G) \setminus \mathrm{Int}(A)$, то есть, T не является разделяющим множеством. Противоречие. $\square$

Теорема 7.2. *Пусть G — трёхсвязный граф, отличный от K_4. Тогда существует такое ребро $e \in E(G)$, что граф $G \cdot e$ трёхсвязен.*

Доказательство. Предположим, что это неверно. Так как $v(G) \geq 5$, тогда для любого ребра $ab \in E(G)$ существует множество $T_{a,b} \in \mathfrak{R}_3(G)$, $T_{ab} \ni a, b$. Рассмотрим минимальный фрагмент H в графе G, отделяемый множеством, содержащим две вершины одного ребра. Пусть $ab \in E(G)$, $T_{ab} = \{a, b, c\}$, $A \in \mathrm{Part}(T_{ab})$ и $H = \mathrm{Int}(A)$. По лемме 3.1, существует вершина $d \in H$, смежная с c.

Рассмотрим множество $T_{cd} \in \mathfrak{R}_3(G)$. Так как $T_{ab} \setminus T_{cd} \subset \{a, b\}$, а эти две вершины смежны, T_{cd} не разделяет T_{ab}. Тогда эти два множества независимы и по следствию 3.3 существует фрагмент $H' \subsetneq H$ с границей T_{ad} — противоречие с минимальностью H. $\square$

7.1.1 Минимальные по стягиванию 4-связные графы

Структура минимальных по стягиванию 4-связных графов много сложнее, но есть возможность её изучить и описать, чем мы и займёмся в этом разделе. Сначала мы докажем, что любой такой граф является 4-регулярным и любое его ребро входит в треугольник, потом дадим более подробное описание класса минимальных по стягиванию 4-связных графов.

В следующих леммах и теореме речь пойдёт о минимальных по стягиванию 4-связных графах. В таком графе G с $v(G) > 5$ для каждого ребра $ab \in E(G)$ существует такое множество $T_{ab} \in \mathfrak{R}_4(G)$, что $a, b \in T_{ab}$. Мы будем использовать это обозначение в доказательствах.

Лемма 7.2. *Пусть G — минимальный по стягиванию 4-связный граф, множество $S \in \mathfrak{R}_4(G)$ содержит a и смежную с ней вершину, H — фрагмент с границей S. Тогда a входит в треугольник axx', где $x \in H$, $d_G(x) = 4$.*

Доказательство. Для графа на 5 вершинах утверждение леммы очевидно. Поэтому достаточно рассмотреть минимальный по стягиванию 4-связный граф G с $v(G) > 5$. Будем доказывать утверждение индукцией по $|H|$. *Базу* составит очевидный случай $H = \{y\}$ (см. рисунок 7.2a). В этом случае $d_G(y) = 4$, причём y смежна только с вершинами множества S. Тогда нам подойдут $x = y$ и x' — смежная с a вершина множества S.

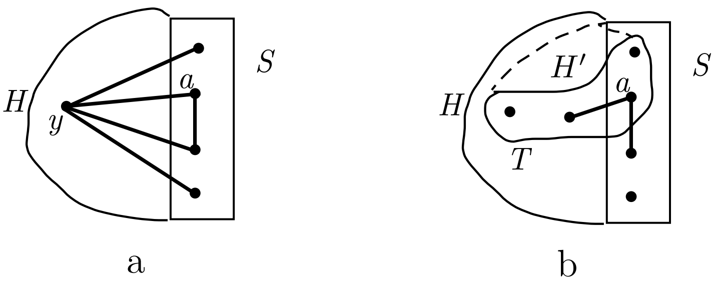


Рис. 7.2: Множество S и фрагмент H.

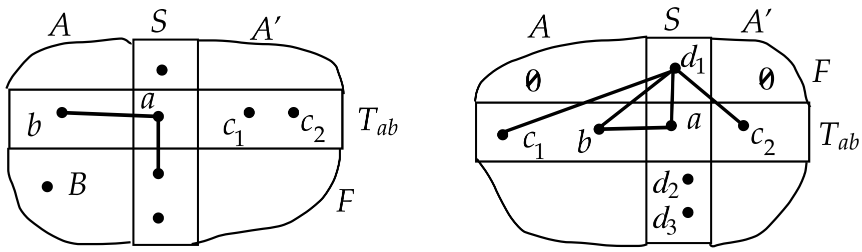
Предположим, что $|H| \geq 2$, а для меньших фрагментов утверждение леммы уже доказано. Пусть $A, A' \in \mathrm{Part}(S)$, $\mathrm{Int}(A) = H$. Рассмотрим два случая.

1. *Существует такое независимое с S множество $T \in \mathfrak{R}_4(G)$, что $T \cap H \neq \varnothing$ и T содержит a и смежную с ней вершину.*
Очевидно, $T \subset A$. Тогда по следствию 3.3 существует фрагмент $H' \subsetneq H$ с границей T (см. рисунок 7.2b). По индукционному предположению, существует искомый треугольник с $x \in H' \subset H$.

2. *Любое такое множество $T \in \mathfrak{R}_4(G)$, что $T \cap H \neq \varnothing$ и T содержит a и смежную с ней вершину, зависимо с S.*
По лемме 3.1, существует вершина $b \in H$, смежная с a. Рассмотрим множество T_{ab}. В нашем случае T_{ab} и S зависимы. Пусть $T_{ab} = \{a, b, c_1, c_2\}$. Так как T_{ab} пересекает внутренности всех частей $\mathrm{Part}(S)$, можно считать, что $c_2 \in \mathrm{Int}(A')$. Рассмотрим два случая.

2.1. $c_1 \notin \mathrm{Int}(A)$.
В этом случае $T_{ab} \cap \mathrm{Int}(A) = \{b\}$. Так как $|\mathrm{Int}(A)| = |H| \geq 2$, существует такая часть $B \in \mathrm{Part}(\{S, T_{ab}\})$, что $B \subset A$, $\mathrm{Int}(B) \neq \varnothing$. То-

гда $|\mathrm{Bound}(B)| \geq 4$. Пусть $B = A \cap F$, где $F \in \mathrm{Part}(T_{ab})$ (см. рисунок 7.3a). Отметим, что $\mathrm{Bound}(B)$ по лемме 3.7 состоит из вершины b и вершин множества S, лежащих в F, которых не более трёх (ведь S пересекает внутренность отличной от F части $\mathrm{Part}(T_{ab})$). Всё сказанное выше означает, что $|\mathrm{Bound}(B)| = 4$. Таким образом, $a, b \in \mathrm{Bound}(B)$, $\mathrm{Bound}(B) \in \mathfrak{R}_4(G)$, множества $\mathrm{Bound}(B)$ и S независимы — этот случай мы разобрали выше.



a b

Рис. 7.3: Множества S и T_{ab}.

2.2. $c_1 \in \mathrm{Int}(A)$.
В этом случае $T_{ab} \setminus A = \{c_2\}$. Так как T_{ab} должно пересекать внутренность всех частей $\mathrm{Part}(S)$, то их только две: A и A'.

Пусть $S = \{a, d_1, d_2, d_3\}$. Одна из вершин d_1, d_2, d_3 смежна с a, но мы не будем это использовать и делать между ними различия. В нашем случае $S \cap T_{ab} = \{a\}$ и множество T_{ab} разделяет $S \setminus T_{ab} = \{d_1, d_2, d_3\}$. Следовательно, существует часть $F \in \mathrm{Part}(T_{ab})$, для которой $|F \cap \{d_1, d_2, d_3\}| = 1$. Не умаляя общности положим $F \cap \{d_1, d_2, d_3\} = \{d_1\}$, тогда

$$B = A \cap F \in \mathrm{Part}(\{S, T_{ab}\}),$$

причём $\mathrm{Bound}(B) = \{a, b, c_1, d_1\}$ (см. рисунок 7.3b). Предположим, что $\mathrm{Int}(B) \neq \varnothing$. Тогда $a, b \in \mathrm{Bound}(B)$, $\mathrm{Bound}(B) \in \mathfrak{R}_4(G)$, множества $\mathrm{Bound}(B)$ и S независимы — этот случай рассмотрен выше. Следовательно, $\mathrm{Int}(B) = \varnothing$. Пусть $B' = F \cap A'$, тогда $\mathrm{Bound}(B') = \{a, c_2, d_1\}$, откуда очевидно, что $\mathrm{Int}(B') = \varnothing$. Следовательно $\mathrm{Int}(F) = S \cap \mathrm{Int}(F) = \{d_1\}$. Тогда $d_G(d_1) = 4$, $\mathrm{N}_G(d_1) = T_{ab} = \{a, b, c_1, c_2\}$.

Проанализируем результаты разобранных случаев и заметим, что на настоящий момент мы доказали следующее утверждение.

Пусть множество $S \in \mathfrak{R}_4(G)$ содержит a и смежную с ней вершину, H — фрагмент с границей S. Тогда a входит в треугольник azz', где одна из вершин z и z' лежит в H.

Действительно, это утверждение есть ослабленное утвержденение леммы. В случаях 1 и 2.1 мы осуществили спуск к меньшим фрагментам. Осуществляя этот спуск, мы рано или поздно придем к очевидному случаю фрагмента из одной вершины или к случаю 2.2. В рассматриваемом случае 2.2 доказали существование треугольника abd_1.

Применим доказанное утверждение к множеству S, вершине d_1 и фрагменту $\mathrm{Int}(A')$. Так как в $\mathrm{Int}(A')$ лежит ровно одна вершина из $\mathrm{N}_G(d_1) = \{a, b, c_1, c_2\}$ — вершина c_2 — и она не может быть смежна с $b, c_1 \notin A'$, то получаем, что вершины a и c_2 смежны (см. рисунок 7.4a).

Теперь рассмотрим множество $T_{d_1c_1}$. По лемме 3.3, множество $T_{d_1c_1}$ должно быть зависимо с $T_{ab} = \mathrm{Bound}(F)$ (так как $T_{d_1c_1} \supset \mathrm{Int}(F) = \{d_1\}$). Следовательно, $T_{d_1c_1}$ разделяет $T_{ab} \setminus T_{d_1c_1} \subset \{a, b, c_2\}$. Поскольку вершина a смежна и с b, и с c_2, то это означает $a \in T_{d_1c_1}$. Тогда множество $T_{d_1c_1}$ зависимо с S (иначе в очередной раз вспомним про разобранный случай 1). Таким образом, $T_{d_1c_1} = \{d_1, c_1, a, z\}$, где $z \in \mathrm{Int}(A')$.

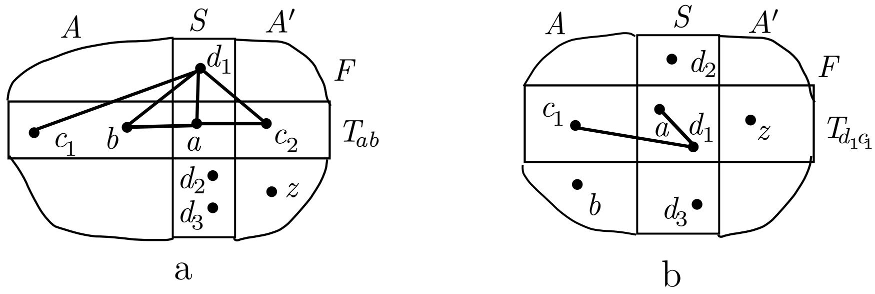


Рис. 7.4: Множества S, T_{ab} и $T_{d_1c_1}$.

Множество $T_{d_1c_1}$ должно разделять $S \setminus T_{d_1c_1} = \{d_2, d_3\}$, поэтому $|\mathrm{Part}(T_{d_1c_1})| = 2$ и $T_{d_1c_1}$ делит A на две части с границами $\{c_1, a, d_1, d_2\}$ и $\{c_1, a, d_1, d_3\}$ (см. рисунок 7.4b). Одна из этих частей содержит b и потому непуста, а её граница содержит a и смежную с ней вершину d_1, лежит в A и независима с S. Это опять разобранный выше случай 1.

Все случаи разобраны, лемма доказана. □

Лемма 7.3. (N. Martinov, 1990.) *Минимальный по стягиванию 4-связный граф является 4-регулярным.*

Доказательство. Для графа на 5 вершинах утверждение леммы очевидно. Поэтому достаточно рассмотреть минимальный по стягиванию 4-связный граф G с $v(G) > 5$. Пусть $v \in V(G)$ и $d_G(v) > 4$. По лемме 7.2 существует вершина $u \in \mathrm{N}_G(v)$, $d_G(u) = 4$ и вершина $u_1 \in \mathrm{N}_G(u)$, $d_G(u_1) = 4$. Рассмотрим множество T_{uu_1}, пусть $A_1, A'_1 \in \mathrm{Part}(T_{uu_1})$. По лемме 7.2 существуют вершины $u_2, u_3 \in \mathrm{N}_G(u)$, $u_2 \in \mathrm{Int}(A_1)$, $u_3 \in \mathrm{Int}(A_1')$, $d_G(u_2) = d_G(u_3) = 4$ (см. рисунок 7.5a). Отметим, что вершины u_2 и u_3 несмежны. Таким образом, $\mathrm{N}_G(u) = \{v, u_1, u_2, u_3\}$.

Рассмотрим множество T_{uu_2}, пусть $A_2, A_2' \in \mathrm{Part}(T_{uu_2})$. По лемме 7.2 в $\mathrm{N}_G(u)$ существуют вершины степени 4, одна из которых лежит в $\mathrm{Int}(A_2)$, а другая — в $\mathrm{Int}(A_2')$. Это могут быть только вершины u_1 и u_3, потому они несмежны (см. рисунок 7.5b). Аналогично, u_1 и u_2 несмежны.

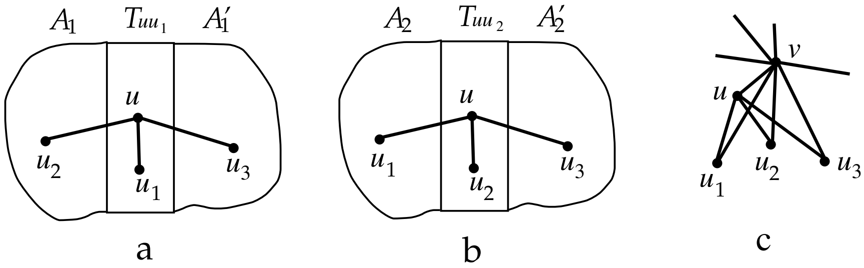


Рис. 7.5: Окрестность вершины v.

Теперь заметим, что по лемме 7.2 каждая из вершин u_1, u_2 и u_3 должна входить в треугольник вместе с вершиной u. Следовательно, все эти три вершины смежны с v. Таким образом, любая вершина $u \in \mathrm{N}_G(v)$ степени 4 имеет трёх попарно несмежных соседей степени 4, лежащих в $\mathrm{N}_G(v)$ (см. рисунок 7.5c).

Пусть K — компонента связности графа $G(N_G(v))$, содержащая u. По доказанному утверждению все вершины из K имеют степень 4 в графе G и смежны только с v и другими вершинами из K. Вершина v не может быть точкой сочленения в графе G, поэтому $V(G) = K \cup \{v\}$.

Тогда вершина v входит в любое множество из $\mathfrak{R}_4(G)$. Следовательно, граф $G - v$ является минимальным по стягиванию трёхсвязным графом, то есть по теореме 7.2 это K_4. Но тогда G — 4-регулярный граф на 5 вершинах. $\square$

Теорема 7.3. (N. Martinov, 1990.) *Для 4-связного графа G следующие два утверждения равносильны.*

1° *Граф G — минимальный по стягиванию.*

2° *Степень каждой вершины графа G равна 4, каждое ребро входит в треугольник.*

Доказательство. 2° $\Rightarrow$ 1°. Если ребро ab входит в треугольник abc и $d_G(c) = 4$, то в графе $G \cdot ab$ окрестность вершины c будет трёхвершинным множеством, поэтому граф $G \cdot ab$ не 4-связен.

$1° \Rightarrow 2°$. По лемме 7.3, граф G является 4-регулярным. Найдём треугольник с ребром $uv \in E(G)$. Рассмотрим разделяющее множество T_{uv}, пусть $A_1, A_2 \in \mathrm{Part}(T_{uv})$. По лемме 7.2, существуют треугольники uu_1u_1' и uu_2u_2', где $u_1 \in \mathrm{Int}(A_1)$, $u_2 \in \mathrm{Int}(A_2)$.

Если хотя бы одна из вершин u_1', u_2' — это v, то мы нашли искомый треугольник. Если же $u_1' \neq v$ и $u_2' \neq v$, то из $d_G(u) = 4$ следует, что $u_1' = u_2' \in T_{uv}$. Обозначим эту вершину через u' (см. рисунок 7.6a).

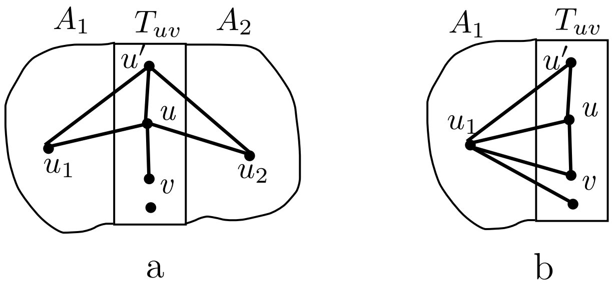


Рис. 7.6: Множество T_{uv}.

Так как $d_G(u') = 4$, и $u \in \mathrm{N}_G(u') \cap T_{uv}$, то одно из множеств $\mathrm{Int}(A_1)$ и $\mathrm{Int}(A_2)$ содержит единственную вершину из $\mathrm{N}_G(u')$. Не умаляя общности предположим, что это $\mathrm{Int}(A_1)$. Тогда u_1 — единственная вершина из $\mathrm{Int}(A_1)$, смежная с u и единственная вершина из $\mathrm{Int}(A_1)$, смежная с u'. Если $\mathrm{Int}(A_1) \neq \{u_1\}$, то трёхэлементное множество $(T_{uv} \setminus \{u, u'\}) \cup \{u_1\}$ отделяет $\mathrm{Int}(A_1) \setminus \{u_1\}$ от остальных вершин графа, что в четырёхсвязном графе невозможно. Следовательно, $\mathrm{Int}(A_1) = \{u_1\}$, тогда $\mathrm{N}_G(u_1) = T_{uv}$ (см. рисунок 7.6b) и, в частности, в графе G есть треугольник uvu_1. □

Из теоремы 7.3 легко вывести следующий факт.

Следствие 7.1. *В минимальном по стягиванию 4-связном графе G все вершины имеют степень 4, а окрестность каждой вершины разбивается на две пары смежных вершин.*

Доказательство. Предположим, что для вершины a это не так. Пусть

$$\mathrm{N}_G(a) = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}, \quad A = \{a\} \cup \mathrm{N}_G(a).$$

По теореме 7.3, ребро ab_1 входит в треугольник, не умаляя общности положим, что это треугольник ab_1b_2. Тогда $b_1b_2 \in E(G)$, следовательно, $b_3b_4 \notin E(G)$. Ребро ab_3 также входит в треугольник и это должен быть треугольник ab_3b_1 или ab_3b_2. Из двух аналогичных вариантов рассмотрим первый. Таким образом, $b_1b_3 \in E(G)$, следовательно, $b_2b_4 \notin E(G)$.

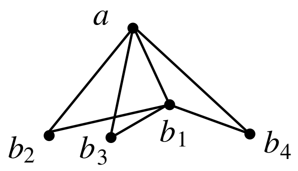


Рис. 7.7: Окрестность вершины a.

Значит, ребро ab_4 входит в треугольник ab_1b_4, то есть $b_1b_4 \in E(G)$ (см. рисунок 7.7).

Но тогда $V(G) = A$, так как иначе 3-вершинное множество $\{b_2, b_3, b_4\}$ отделяет $\{a, b_1\}$ от $V(G) \setminus A$, что в 4-связном графе невозможно. Следовательно, G — полный граф на 5 вершинах, для которого доказываемое утверждение выполняется. $\square$

Следующая теорема даст детальную характеризацию минимальных по стягиванию 4-связных графов. Напомним, что для произвольного графа G через G^2 обозначается граф на множестве вершин $V(G)$, в котором соединены рёбрами те и только те пары вершин, что находятся на расстоянии не более 2 в графе G.

Теорема 7.4. (N. Martinov.) *Множество всех минимальных по стягиванию 4-связных графов состоит из графов следующих двух видов.*

1° C_n^2 *при* $n \geq 5$.

2° *Рёберные графы* H_E *для 4-рёберно-циклически связных кубических графов* H.

Доказательство. Легко видеть, что любой граф из этих двух серий является однородным графом степени 4. То, что граф C_n^2 является 4-связным, можно проверить непосредственно. Понятно, что из 4-циклической связности графа H следует 4-связность графа H_E. Нетрудно убедиться, что каждое ребро любого графа указанных двух серий входит в треугольник, поэтому по теореме 7.4 все они являются минимальными по стягиванию 4-связными графами.

Рассмотрим минимальный по стягиванию 4-связный граф G. Как мы знаем, для любой вершины $v \in V(G)$ её окрестность разбивается на две пары смежных вершин. Рассмотрим два случая.

1. *Пусть для любой вершины* $v \in V(G)$ *подграф* $G(N_G(v))$ *представляет из себя два несмежных ребра, то есть каждое ребро графа* G *входит ровно в один треугольник.*

Докажем, что тогда $G = H_E$ для некоторого кубического графа H. Пусть вершины H соответствуют треугольникам графа G, а две вершины $a, b \in V(H)$ смежны тогда и только тогда, когда соответствующие треугольники имеют общую вершину. Очевидно, получится кубический граф H. Легко видеть, что $H_E = G$. Из 4-связности G следует 4-рёберно-циклическая связность графа H.

2. *Пусть для некоторой вершины $v \in V(G)$ подграф $G(N_G(v))$ содержит хотя бы 3 ребра.*
Учитывая следствие 7.1 сделаем вывод, что тогда $G(N_G(v))$ содержит простой путь из трёх ребер, а все вершины из $\mathrm{N}_G(v) \cup \{v\}$ можно занумеровать a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 так, что $a_ia_{i+1}, a_ia_{i+2} \in E(G)$. (Естественно, все индексы должны лежать в $[1..5]$.) В этой нумерации $v = a_3$, см. рисунок 7.8a.

Предположим, что для некоторого $k \geq 5$ в графе есть различные вершины $a_1, \dots, a_k$ с аналогичным свойством: $a_ia_{i+1}, a_ia_{i+2} \in E(G)$. (Все индексы должны лежать в $[1..k]$.) Пусть H — граф с

$$V(H) = \{a_1, \dots, a_k\} \quad \text{и} \quad E(H) = \{a_ia_j \ : \ i, j \in [1..k],\ |i - j| \leq 2\}.$$

Тогда $d_H(a_i) = 4$ при $i \in [3..k-2]$, $d_H(a_2) = d_H(a_{k-1}) = 3$ и $d_H(a_1) = d_H(a_k) = 2$. Посмотрим, с чем может быть смежна вершина a_{k-1}. В результате мы либо убедимся, что наш граф является квадратом цикла, либо продлим цепочку на новую вершину a_{k+1}, смежную с a_{k-1} и a_k, после чего будем рассматривать соседей вершины a_k. Рассмотрим случаи.

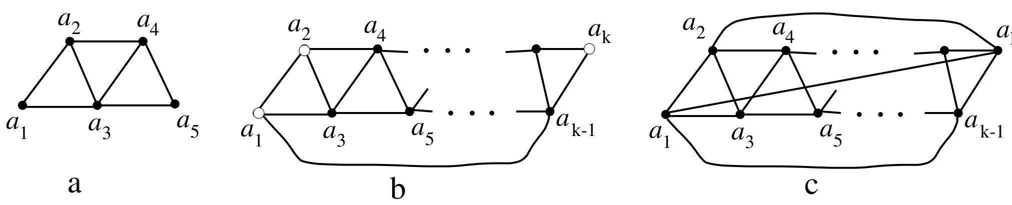


Рис. 7.8: Граф G.

2.1. $a_{k-1}a_1 \in E(G)$.
Тогда $H' = H + a_1a_{k-1}$ — подграф графа G, в котором лишь три вершины имеют степень менее 4 — это a_1, a_2 и a_k (см. рисунок 7.8b). Следовательно, $V(G) = V(H)$, иначе трёхвершинное множество $\{a_1, a_2, a_k\}$ отделяет $\{a_3, a_4, \dots, a_{k-1}\}$ от $V(G) \setminus V(H)$, что невозможно в четырёхсвязном графе.

Тогда остаётся единственный способ сделать граф H' 4-регулярным графом G: нужно добавить рёбра a_1a_k и a_2a_k, в результате получится, что $G = C_k^2$ (граф G — это квадрат цикла $a_1a_2 \dots a_k$, см. рисунок 7.8c).

2.2. $a_{k-1}a_2 \in E(G)$.
Тогда $H' = H + a_{k-1}a_2$ — подграф графа G, в котором степени вершин $a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}$ равны 4, а степени вершин a_1 и a_k равны 2. Следовательно, $V(G) \setminus V(H') \neq \varnothing$. В этом случае двухвершинное множество $\{a_1, a_k\}$ отделяет $\{a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{k-1}\}$ от $V(G) \setminus V(H')$ (см. рисунок 7.9a), что невозможно в четырёхсвязном графе.

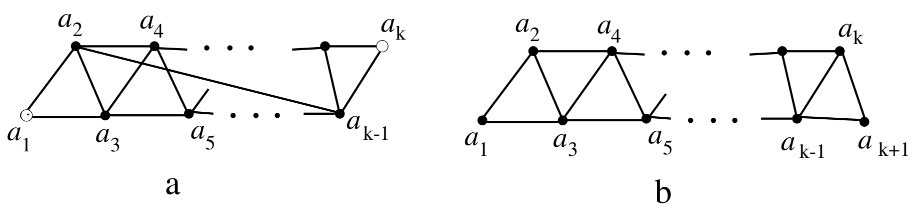


Рис. 7.9: Граф G.

2.3. a_{k-1} *смежна с вершиной* $a_{k+1} \notin V(H)$.
Ребро $a_{k-1}a_{k+1}$ должно входить в треугольник. Если это треугольник $a_{k-1}a_k a_{k+1}$, то мы "продлили" нашу цепочку на одну вершину (см. рисунок 7.9b).

Предположим, что треугольник — другой. Этот треугольник может быть либо $a_{k-1}a_{k+1}a_{k-2}$, либо $a_{k-1}a_{k+1}a_{k-3}$ (третья вершина треугольника должна быть смежна с a_{k-1}, см. рисунок 7.10a). Значит, $d_H(a_{k-2}) < 4$ или $d_H(a_{k-3}) < 4$, что возможно только при $k - 2 \leq 2$ или $k - 3 \leq 2$. Первое противоречит $k \geq 5$, а второй случай возможен при $k = 5$. Таким образом, единственный оставшийся вариант — это $k = 5$ и треугольник $a_2a_4a_6$.

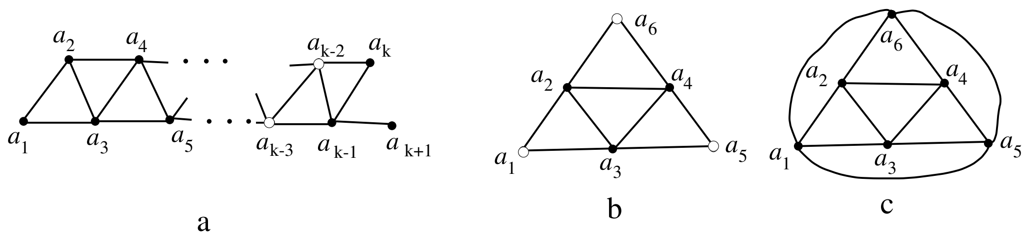


Рис. 7.10: Граф G.

В этом случае рассмотрим граф H', полученный из H добавлением вершины a_6 и рёбер a_2a_6, a_4a_6. Мы имеем

$$d_{H'}(a_2) = d_{H'}(a_3) = d_{H'}(a_4) = 4, \quad d_{H'}(a_1) = d_{H'}(a_5) = d_{H'}(a_6) = 2.$$

Если $V(G)\setminus V(H') \neq \varnothing$, то трёхвершинное множество $\{a_1, a_5, a_6\}$ отделяет $\{a_2, a_3, a_4\}$ от $V(G)\setminus V(H')$, что невозможно в четырёхсвязном графе (см. рисунок 7.10b).

Таким образом, $V(H') = V(G)$. Чтобы сделать граф H' 4-регулярным графом G на тех же 6 вершинах, нам нужно добавить все 3 возможных ребра a_1a_5, a_1a_6, a_5a_6 (см. рисунок 7.10c). Нетрудно проверить, что полученный граф G — это квадрат цикла $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ длины 6. $\square$

7.2 Трёхсвязные графы: происхождение от колеса

В этом разделе основным объектом нашего исследования станет трёхсвязный граф G и его разделяющие множества.

Определение 7.2. Назовем *колесом* граф W_n на вершинах $p, q_1, \ldots, q_n$ (где $n \geq 3$), в котором проведены рёбра pq_i и q_iq_{i+1} для всех $i \in [1..n]$ (нумерация вершин — циклическая).

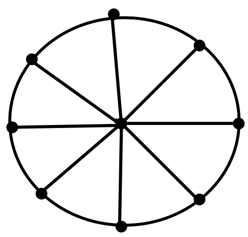


Рис. 7.11: Колесо W_8.

Понятно, что любое колесо — трёхсвязный граф. Татт доказал, что с каждым отличным от колес трёхсвязным графом G можно провести одну из двух операций, переводящих его в трёхсвязный граф, содержащий на одно ребро меньше. Эти операции — удаление ребра и стягивание ребра, не входящего в треугольник. Действуя в обратном порядке, можно для каждого $m \geq 6$ построить списки всех трёхсвязных графов с m рёбрами.

Теорема 7.5. (W. T. Tutte, 1966.) *Пусть G — трёхсвязный граф, отличный от колеса. Тогда выполняется хотя бы одно из двух утверждений.*

1° *Существует такое ребро $e \in E(G)$, что граф $G - e$ трёхсвязен.*

2° *Существует такое ребро $e \in E(G)$, что граф $G \cdot e$ трёхсвязен и ребро e не входит ни в один треугольник.*

Доказательство. Пусть G — минимальный трёхсвязный граф G, отличный от колеса. Достаточно показать, что для G выполняется утверждение 2°. Предположим противное. Вспомним, что по следствию 6.2 в минимальном трёхсвязном графе есть вершина степени 3 и рассмотрим два случая.

1. *Существует такая вершина $x \in V(G)$, что $d_G(x) = 3$, $\mathrm{N}_G(x) = \{y, t_1, t_2\}$ и $yt_1, yt_2 \notin E(G)$.*
Тогда ребро xy не входит ни в один треугольник. Так как утверждение 2° не выполнено, существует множество $S = \{x, y, z\} \in \mathfrak{R}_3(G)$. Тогда множество $T = \mathrm{N}_G(x) \in \mathfrak{R}_3(G)$ зависимо с S, а значит, $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2\}$ и множество S отделяет $t_1 \in \mathrm{Int}(A_1)$ от $t_2 \in \mathrm{Int}(A_2)$ (см. рисунок 7.12). Теперь очевидно, что $t_1t_2 \notin E(G)$ и ребро xt_1 не входит ни в один треугольник.

Понятно, что $\mathrm{Part}(T) = \{B_1, B_2\}$, причем можно считать, что $\mathrm{Int}(B_1) = \{x\}$. Рассмотрим часть $F = A_1 \cap B_2 \in \mathrm{Part}(\{S, T\})$. Так как $t_1y \notin E(G)$ и $d_G(t_1) \geq 3$, существует хотя бы одна отличная от t_1 вершина $v \in \mathrm{Int}(A_1)$. Понятно, что $v \in \mathrm{Int}(F)$, стало быть, F — непустая часть с границей $\mathrm{Bound}(F) = \{y, t_1, z\}$, поэтому $\mathrm{Bound}(F) \in \mathfrak{R}_3(G)$.

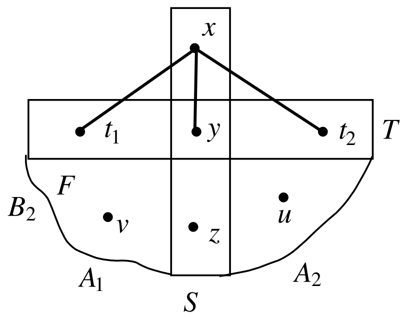


Рис. 7.12: Случай 1.

Предположим, что существует множество $S' = \{x, t_1, u\} \in \mathfrak{R}_3(G)$. В этом случае S' должно быть зависимо с T и отделять y от t_2. Вспомним, что $y \in A_2$, $t_2 \in \mathrm{Int}(A_2)$, откуда понятно, что $u \in \mathrm{Int}(A_2)$ (иначе S' не разделяет часть $A_2 \in \mathrm{Part}(S)$). Следовательно, S' зависимо с S, то есть, отделяет y от z, а это означает, что S' зависимо с $\mathrm{Bound}(F)$. При этом, S' не пересекает внутренность F, что невозможно.

Полученное противоречие показывает, что граф $G \cdot xt_1$ трёхсвязен и для ребра xt_1 выполняется утверждение 2° (очевидно, это ребро не входит в треугольник).

2. *Для любой вершины $x \in V(G)$ степени 3 в графе $G(\mathrm{N}_G(x))$ хотя бы два ребра.*

Пусть $d_G(x_2) = 3$, $\mathrm{N}_G(x_2) = \{x_1, x_3, y\}$, причем $x_1y, x_3y \in E(G)$ (см. рисунок 7.13a). Пусть $d_G(y) = 3$. Если при этом $V(G) \neq \{x_1, x_2, x_3, y\}$, то $\{x_1, x_3\}$ отделяет $\{y, x_2\}$ от остальных вершин графа, что в трехсвязном графе невозможно. Значит, $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, y\}$ и в этом случае G — это граф K_4 (он же колесо W_3). Следовательно, $d_G(y) > 3$.

Предположим, что в нашем графе нашелся простой путь $x_1x_2 \dots x_k$, где $k \geq 3$, все эти вершины смежны с вершиной y и

$$d_G(x_2) = \dots = d_G(x_{k-1}) = 3, \quad d_G(y) > 3.$$

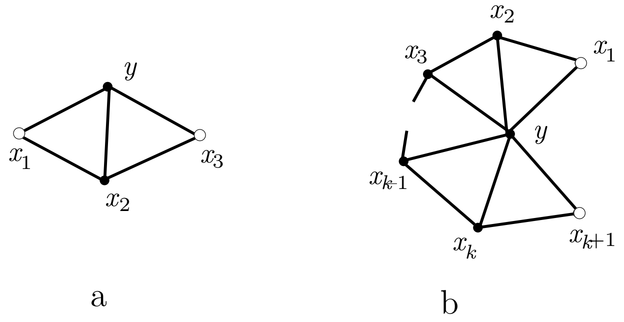


Рис. 7.13: Случай 2.

По теореме 6.3 в треугольнике $yx_{k-1}x_k$ должно быть хотя бы две вершины степени 3. Так как $d_G(y) > 3$, мы имеем $d_G(x_k) = 3$ и, аналогично, $d_G(x_1) = 3$. Если $x_1x_k \in E(G)$, то граф G — это колесо W_k. Пусть $x_1x_k \notin E(G)$ и вершина x_k смежна с новой вершиной x_{k+1} (см. рисунок 7.13b). Отметим, что $\mathrm{N}_G(x_k) = \{x_{k-1}, x_{k+1}, y\}$ и между этих трех вершин должны быть проведены два ребра графа G. Мы знаем, что $x_{k-1}x_k \in E(G)$ и $x_{k-1}x_{k+1} \notin E(G)$, следовательно, $yx_{k+1} \in E(G)$. Таким образом, мы продлили нашу цепочку ещё на одну вершину. $\square$

Глава 8

Связные и стягиваемые множества вершин

8.1 Разбиение вершин графа на связные множества

Достаточно хорошо известно, что вершины двусвязного графа G можно разбить на два связных множества заданных размеров, в сумме дающих $v(G)$. (Доказательство этого факта — несложное упражнение на дерево блоков и точек сочленения.) Вполне естественно, что обобщение этого факта верно и для графов большей связности — это теорема, независимо доказанная Дьори и Ловасом. Удивительно то, что эта теорема имеет достаточно короткое и симпатичное (хотя и весьма непростое!) доказательство.

Теорема 8.1. (E. Györi, 1976; L. Lovász, 1977.) *Пусть G — k-связный граф на n вершинах, $v_1, \dots, v_k \in V(G)$, а натуральные числа $n_1, \dots, n_k$ таковы, что $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Тогда множество вершин графа G можно разбить на k таких связных подмножеств $V_1, \dots, V_k$, что $|V_i| = n_i$ и $v_i \in V_i$ для каждого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.*

Приведем доказательство этой теоремы, основанное на работе A. Hoyer и R. Thomas (2016). Начнем с того, что переформулируем теорему так, чтобы было удобно этот факт доказывать.

Лемма 8.1. *Пусть G — k-связный граф на n вершинах, $v_1, \dots, v_k \in V(G)$, а натуральные числа $m_1, \dots, m_k$ таковы, что $\sum_{i=1}^{k} m_i < n$. Пусть $V_1 \ni v_1, \dots, V_k \ni v_k$ — непересекающиеся связные множества вершин графа G, причем $|V_i| = m_i$ для каждого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Тогда существуют такие непересекающиеся связные множества $V_1' \ni v_1$,*

..., $V'_k \ni v_k$ вершин графа G, что $|V'_1| = m_1 + 1$ и $|V'_i| = m_i$ для всех $i \in \{2, \dots, k\}$.

Очевидно, что теорема 8.1 следует из леммы 8.1 — можно, начиная с $V_i = \{v_i\}$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ шаг за шагом увеличить наши связные множества до нужных размеров.

Далее мы будем доказывать эту лемму. Начнем с терминологии, которая для этого потребуется. До конца раздела мы считаем, что выполнено условие леммы 8.1.

Пусть $G_i = G(V_i)$, $\quad S = V(G) \setminus \left(\cup_{i=1}^{k} V_i\right)$.

Определение 8.1. Пусть $i \in \{2, \dots, k\}$.

1) Для вершины $x \in V_i$ ее *резервуар* $R(x)$ — это множество всех вершин из V_i, достижимых в графе $G_i - x$ из v_i. Положим $R(v_i) = \varnothing$.

2) Последовательность различных вершин $z_0 = v_i$, ..., z_p из множества V_i (возможно, $p = 0$) — *каскад* в графе G_i, если для всех $s \in \{1, \dots, p-1\}$ выполнено условие $z_{s+1} \notin R(z_s)$.

Замечание 8.1. 1) Отметим, что $x \notin R(x)$ по определению.

2) Для любой вершины $a \in V_i$ множество $R(a)$ — связное в графе G_i. Более того, для любой вершины $x \notin R(a)$ множество $R(a)$ — связное в графе $G_i - x$.

Лемма 8.2. *Пусть $a, b \in V_i$, причем $a \notin R(b)$. Тогда $R(a) \supset R(b) \cup \{b\}$.*

Доказательство. Из $a \notin R(b)$ следует, что b отделяет a от v_i. Тогда a не отделяет b от $v_i \in R(b)$, а следовательно, $M = R(b) \cup \{b\}$ — связное множество в графе $G_i - a$. Так как $v_i \in M$, мы имеем $M \subset R(a)$.

□

Следствие 8.1. *Пусть $z_0, z_1, \dots, z_p$ — каскад в G_i, $s \in \{1, \dots, p\}$. Тогда выполнены следующие утверждения:*

1) $R(z_s) \supset R(z_{s-1}) \cup \{z_{s-1}\}$;

2) *z_s несмежна с $R(z_{s-1})$.*

Доказательство. 1) Прямое следствие определения каскада и леммы 8.2.

2) Очевидно, так как z_{s-1} отделяет z_s от $R(z_{s-1})$. □

Определение 8.2. 1) Назовём *конфигурацией* графы G_1, G_2, ..., G_k, удовлетворяющие условию леммы 8.1, и по одному каскаду в каждом из графов G_2,..., G_k.

2) Вершина называется *каскадной* для данной конфигурации, если входит в один из каскадов и отлична от $v_2, \dots, v_k$.

3) Положим $\mathrm{rk}(v_2) = \cdots = \mathrm{rk}(v_k) = 0$. Определим *ранг* каскадных вершин рекурсивно. Каскадная вершина z, смежная с V_1, имеет $\mathrm{rk}(z) = 1$. У остальных каскадных вершин ранг пока не определен.

Предположим, что уже определены все вершины ранга r. Тогда для каждой пары таких каскадных вершины z, z', что $\mathrm{rk}(z') = r$, z смежна с $R(z')$ и ранг z пока не определен, положим $\mathrm{rk}(z) = r + 1$.

Замечание 8.2. 1) Ранг каскадной вершины может остаться неопределенным после окончания процесса.

2) В виду следствия 8.1 вершины z и z' из определения ранга принадлежат разным каскадам.

Определение 8.3. Пусть дана конфигурация $\mathcal{G}$.

1) Назовем конфигурацию *нормальной*, если у каждой каскадной вершины определен ранг и для каждого $i \in \{2, \dots, k\}$ ранги вершин каскада графа G_i строго возрастают (то есть, если этот каскад $z_0, \dots, z_p$ и $p \geq 1$, то $\mathrm{rk}(z_1) < \cdots < \mathrm{rk}(z_p)$).

2) Для каждого r определим $\rho_r(\mathcal{G})$ как сумму размеров резервуаров всех каскадных вершин ранга r.

3) Назовём *хвостом* такое ребро $ab \in E(G)$, что $a \in S$, а b принадлежит резервуару некоторой каскадной вершины. *Рангом* хвоста ab назовём наименьший ранг такой каскадной вершины z, что $b \in R(z)$.

Определение 8.4. 1) Рассмотрим все нормальные конфигурации. Выберем из них те, у которых максимально ρ_1. Затем из оставшихся конфигураций выберем те, у которых максимально ρ_2. И так далее, наконец, выберем те конфигурации, у которых максимально ρ_r. Все полученные в итоге конфигурации назовем *r-оптимальными.*

2) Назовем конфигурацию $\mathcal{G}$ *оптимальной*, если она r-оптимальна для любого r.

Замечание 8.3. 1) Если $r \leq t$, то любая t-оптимальная конфигурация является r-оптимальной.

2) Вершина v_i является каскадом в G_i, причем ее ранг определять не нужно. Поэтому, нормальные конфигурации существуют. Значит, существуют r-оптимальные конфигурации для любого натурального числа r.

3) Максимальный ранг каскадной вершины не превосходит количество каскадных вершин, которое, в свою очередь, не превосходит n. Поэтому, n-оптимальная конфигурация является оптимальной. В частности, это означает, что оптимальные конфигурации существуют.

4) Если $ab \in E(G)$ — хвост и $b \in R(z)$, то $z \notin \{v_2, \dots v_k\}$, так как резервуары всех этих вершин пусты.

Далее мы докажем два свойства оптимальных конфигураций, из которых будет несложно следовать лемма 8.1.

Лемма 8.3. *Если существует оптимальная конфигурация, имеющая хвост, то утверждение леммы* 8.1 *выполнено.*

Доказательство. Рассмотрим все r-оптимальные конфигурации с хвостом ранга r (такие в нашем случае есть) и выберем из них конфигурацию $\mathcal{G}$ с минимальным r. Пусть хвост ab таков, что $a \in S$, а $z \in V_i$ — каскадная вершина наименьшего ранга, для которой $b \in R(z)$. Рассмотрим несколько случаев.

1. *z является точкой сочленения графа G_i.*
Пусть U — компонента связности графа $G_i - z$, не содержащая v_i. Тогда существует такая вершина $u \in U$, что граф $G_i - u$ связен. Положим $W_i = V_i \cup \{a\} \setminus \{u\}$ (см. рисунок 8.1a). Очевидно, множество W_i связно, $|W_i| = m_i$. Построим новую конфигурацию $\mathcal{G}'$, заменив V_i на W_i, после чего из всех каскадов уберем вершины ранга более r.

Так как конфигурация $\mathcal{G}$ была нормальной, у всех каскадных вершин ранга не более r ранг по-прежнему определен и не изменился, не изменились и все их резервуары, кроме $R(z)$, в который добавилась вершина a. В новой конфигурации $\mathcal{G}'$ при $1 \le s \le r-1$ мы имеем $\rho_s(\mathcal{G}') = \rho_s(\mathcal{G})$, но $\rho_r(\mathcal{G}') = \rho_r(\mathcal{G})+1$ (так как $R(z)$ увеличился). Мы получили противоречие с r-оптимальностью конфигурации $\mathcal{G}$.

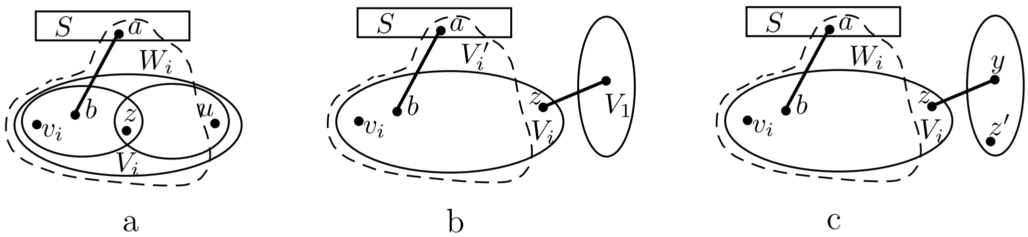


Рис. 8.1: Конфигурация с хвостом.

2. *z не является точкой сочленения графа G_i.*
Если $\mathrm{rk}(z) = 1$, то положим $V_1' = V_1 \cup \{z\}$, $V_i' = V_1 \cup \{a\} \setminus \{z\}$, эти множества, очевидно, связны (см. рисунок 8.1b). Положив $V_j' = V_j$ при $j \notin \{1, i\}$, мы получим нужные в лемме 8.1 связные множества.

Пусть $\mathrm{rk}(z) = r > 1$, тогда z смежна с $y \in R(z')$, где z' — каскадная вершина ранга $r-1$. В этом случае положим $W_i = V_i \cup \{a\} \setminus \{z\}$ (см. рисунок 8.1c). Построим новую конфигурацию $\mathcal{G}'$, заменив V_i на W_i, после чего из всех каскадов уберем вершины ранга не менее r.

Так как конфигурация $\mathcal{G}$ была нормальной, у всех каскадных вершин ранга не более $r-1$ ранг по-прежнему определен и не изменился, не изменились и все их резервуары. В новой конфигурации $\mathcal{G}'$ при $1 \le s \le r-1$ мы имеем $\rho_s(\mathcal{G}') = \rho_s(\mathcal{G})$, а значит $\mathcal{G}'$ является $(r-1)$-оптимальной (напомним, что r-оптимальная конфигурация $\mathcal{G}$ является и $(r-1)$-оптимальной). Однако, ребро zy в конфигурации $\mathcal{G}'$ является хвостом ранга $r-1$. Противоречие с минимальностью ранга хвоста ab. $\square$

Лемма 8.4. *Пусть $\mathcal{G}$ — оптимальная конфигурация, $i \in \{2, \dots, k\}$, а $z_0 = v_i$, ..., z_p — каскад графа G_i (возможно, $p = 0$). Пусть ребро ab таково, что вершина $a \in V_i$ не входит в резервуар ни одной из каскадных вершин, а вершина b либо лежит в V_1, либо входит в резервуар одной из каскадных вершин. Тогда $a = z_p$.*

Доказательство. Предположим, что $a \ne z_p$. Тогда по следствию 8.1 вершина a не совпадает ни с одной из вершин $z_0, \dots, z_p$. Попробуем добавить a в каскад графа G_i.

Сразу же отметим, что у нас получится определить ранг вершины a, так как a смежна с b и либо $b \in V_1$ (тогда $\mathrm{rk}(a) = 1$), либо $b \in R(z')$, где z' — каскадная вершина. Во втором случае мы знаем, что $\mathrm{rk}(z')$ определен (так как конфигурация нормальная), а значит, $\mathrm{rk}(a) \le \mathrm{rk}(z') + 1$.

Итак, пусть $\mathrm{rk}(a) = r$. Если $r > \mathrm{rk}(z_p)$, то положим $a = z_{p+1}$. Так как $a \notin R(z_p)$, вершина z_p отделяет a от z_{p+1} и мы увеличили каскад графа G_i, не изменив остальные, что противоречит оптимальности конфигурации $\mathcal{G}$.

Пусть $r \le \mathrm{rk}(z_p)$. Это означает, что $p \ne 0$. Найдем такое $j \ge 0$, что $\mathrm{rk}(z_j) < r \le \mathrm{rk}(z_{j+1})$. Тогда добавим в каскад графа G_i вершину $z'_{j+1} = a$ (это возможно ввиду $a \notin R(z_j)$) и исключим из него z_{j+1}, ..., z_p, а также все вершины рангов более r из остальных каскадов. Полученная конфигурация $\mathcal{G}'$, очевидно, нормальна, все каскадные вершины рангов не более $r-1$ из $\mathcal{G}$ есть и в $\mathcal{G}'$, причем с теми же резервуарами. Следовательно, $\rho_s(\mathcal{G}') = \rho_s(\mathcal{G})$ для всех $s \in \{1, \dots, r-1\}$.

Все каскадные вершины ранга r из $\mathcal{G}$ (кроме, возможно, z_{j+1}) есть и в $\mathcal{G}'$, причем с теми же резервуарами. При этом, добавилась вершина a ранга r и, возможно, исчезла вершина z_{j+1} ранга r. Из $a \notin R(z_{j+1})$ по лемме 8.2 следует, что $R(a) \supset R(z_{j+1}) \cup \{z_{j+1}\} \supsetneq R(z_{j+1})$. Поэтому, $\rho_r(\mathcal{G}') > \rho_r(\mathcal{G})$, что противоречит оптимальности $\mathcal{G}$. $\square$

Доказательство леммы 8.1. Рассмотрим оптимальную конфигурацию в G_1, G_2 ..., G_k — выше сказано, почему такая существует. Для каждого $i \in \{2, \dots, k\}$ конфигурация включает в себя каскад $v_i = z_0^i, \dots, z_{p_i}^i = w_i$.

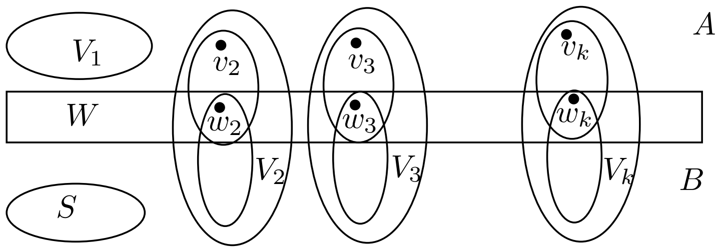


Рис. 8.2: Разделяющее множество W.

(Возможно, $p_i = 0$. В этом случае, $w_i = v_i$.) Пусть A — это объединение V_1, всех каскадных вершин и их резервуаров, а B — объединение S и всех вершин из $V_2 \cup \dots \cup V_k$, не вошедших в каскады и резервуары каскадных вершин (см. рисунок 8.2). В силу лемм 8.3 и 8.4, множество $W = \{w_2, \dots, w_k\}$ из $k-1$ вершины отделяет A от B, что противоречит k-связности графа G. $\square$

8.2 Стягиваемые множества вершин в трёхсвязном графе

Итак, вершины любого k-связного графа можно разбить на k связных множеств заданных размеров. А можно ли при $k \geq 2$ выделить в k-связном графе G связное множество W заданного размера так, чтобы граф $G - W$ был $k-1$ связным (такое множество называется *стягиваемым*)? Хотя бы в случае, когда размер W мал по сравнению с $v(G)$?

Из работ Мадера следует, что ответ на оба вопроса при $k \geq 4$ отрицательный: для любого m существуют сколь угодно большие k-связные графы, не имеющие стягиваемого множества из m вершин.

Остается лишь случай трёхсвязных графов, который мы разберём подробнее.

Определение 8.5. Назовём множество вершин W трёхсвязного графа G *стягиваемым*, если граф $G(W)$ связен, а граф $G - W$ двусвязен.

Гипотеза 8.1. (W. McCuaig, K. Ota, 1994.) *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда существует такое n, что любой трёхсвязный граф G с не менее чем n вершинами имеет стягиваемое множество из m вершин.*

Для $m = 1$ утверждение гипотезы очевидно, для $m = 2$ также достаточно несложно (см. теорему 7.2). Случай $m = 3$ доказан авторами гипотезы, случай $m = 4$ доказал в 2000 году M. Kriesell (и это доказательство является весьма технически сложным). Ни для какого $m \geq 5$ на настоящий момент гипотеза ни доказана, ни опровергнута. Мы приведем доказательство гипотезы для $m = 3$ и докажем теорему о стягиваемых множествах большого размера в трёхсвязном графе.

Для доказательства мы будем активно использовать дерево разбиения двусвязного графа и соответствующую терминологию (см. раздел 5.1). Начнем со вспомогательного утверждения.

Определение 8.6. Пусть W — стягиваемое множество вершин трёхсвязного графа G. Назовём W *максимальным*, если не существует такой вершины $x \in V(G) \setminus W$, что множество $W \cup \{x\}$ — стягиваемое.

Замечание 8.4. Если стягиваемое множество W — максимальное, то для любой смежной с W вершины $x \in V(G) \setminus W$ граф $G - W - x$ недвусвязен.

Лемма 8.5. *Пусть G — трёхсвязный граф, $W \subset V(G)$ — максимальное стягиваемое множество, причем $H = G - W$ не является простым циклом. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Множество W смежно со всеми внутренними вершинами частей-циклов графа G.*

2) *Все крайние части* $\mathrm{Part}(H)$ *— циклы длины не менее 4. Крайних частей в* $\mathrm{Part}(H)$ *не менее двух. Граница любой крайней части является одиночным множеством графа H.*

3) *Пусть A — крайняя часть* $\mathrm{Part}(H)$. *Тогда граф* $H - \mathrm{Int}(A)$ *двусвязен.*

Доказательство. 1) Внутренние вершины частей-циклов графа H имеют в H степень 2, и потому в трёхсвязном графе G они должны быть смежны с W.

2) Так как H — не цикл, этот граф имеет одиночные множества. Следовательно, дерево разбиения $\mathrm{BT}(H)$ имеет более двух вершин, все его висячие вершины соответствуют крайним частям (и таких частей хотя бы две), а граница любой крайней части является одиночным множеством графа H.

Предположим, что крайняя часть $A \in \mathrm{Part}(H)$ — 3-блок или треугольник. Граница $\mathrm{Bound}(A) = S = \{s, s'\}$ — одиночное множество графа H. Если W несмежно с $\mathrm{Int}(A)$, то двухвершинное множество S отделяет в трёхсвязном графе G непустое множество $\mathrm{Int}(A)$ от остальных вершин, что невозможно. Значит, существует смежная с W вершина

$x \in \mathrm{Int}(A)$. По теореме 5.2 не существует множества из $\mathfrak{R}_2(H)$, содержащего внутреннюю вершину 3-блока или части-треугольника. Следовательно, граф $H - x$ двусвязен, что противоречит условию.

3) Пусть $\mathrm{Bound}(A) = \{x, x'\}$. По пункту 2 вершины множества $\mathrm{Int}(A)$ образуют простой xx'-путь в H. Предположим, что граф $H' = H - \mathrm{Int}(A)$ недвусвязен. Так как H' становится двусвязным при добавлении xx'-пути, в H' есть точка сочленения, отделяющая x от x'.

С другой стороны, $\mathrm{Bound}(A) = \{x, x'\}$ — одиночное множество в H. Следовательно, ни одно множество из $\mathfrak{R}_2(H)$ не отделяет x от x'. По теореме Менгера, тогда существуют три независимых xx'-пути в H. Не более чем один из них пересекает xx'-путь, образованный вершинами $\mathrm{Int}(A)$. Следовательно, в графе H' существуют два независимых xx'-пути, а значит, никакая точка сочленения графа H' не может отделять x от x'. Полученное противоречие показывает, что граф H' двусвязен. $\square$

Теорема 8.2. (W. McCuaig, K. Ota, 1994.) *Пусть G — трёхсвязный граф с $v(G) \geq 6$, отличный от $K_{3,3}$ и Q_8 (графа из вершин и рёбер трёхмерного куба). Тогда G имеет стягиваемое множество из 3 вершин.*

Доказательство. (**M. Kriesell, 2000.**) По теореме 7.2 мы знаем, что G имеет стягиваемые множества из двух вершин. Пусть $\mathcal{W}$ — множество всех таких множеств. Тогда можно считать, что любое множество $W \in \mathcal{W}$ — максимальное, иначе теорема доказана.

Для $W \in \mathcal{W}$ будем использовать обозначение $H_W = G - W$. Если граф H_W — цикл, то он содержит хотя бы 4 вершины и все они должны быть смежны в трёхсвязном графе G с W. Если граф H_W — не цикл, то по лемме 8.5 имеет хотя бы две крайних части, каждая из которых — цикл и имеет хотя бы две внутренних вершины, смежных с W. Таким образом, в любом случае $|\mathrm{N}_G(W)| \geq 4$.

Разберем два случая.

1. *Существует такое стягиваемое множество $W \in \mathcal{W}$, что граф H_W — простой цикл.*
Пусть $W = \{x, y\}$. Предположим, что H_W — цикл $a_1 a_2 \dots a_m$ (нумерация вершин — циклическая по модулю m). Пусть $a_1 x, a_4 x \in E(G)$. Если y смежна с $\{a_2, a_3\}$, то $\{a_2, a_3, y\}$ — искомое стягиваемое множество из 3 вершин, теорема доказана (см. рисунок 8.3a). Значит, $a_2, a_3 \in \mathrm{N}_G(x) \setminus \mathrm{N}_G(y)$, но в этом случае множество $W' = \{a_2, a_3\}$ — стягиваемое (см. рисунок 8.3b). Однако, $\mathrm{N}_G(W') \subset \{a_1, a_4, x\}$, что противоречит доказанному выше.

Значит, если $a_1 x \in E(G)$, то $a_4 y \in E(G)$ и при этом $a_1 y, a_4 x \notin E(G)$. Аналогично для любой другой пары вершин цикла с разностью индек-

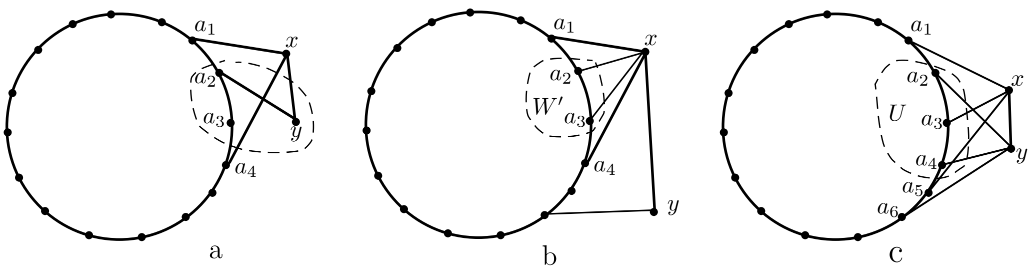


Рис. 8.3: Граф H_W — цикл.

сов 3. При $m = 4$ получаем, что $G = K_{3,3}$ — одно из исключений в теореме.

Далее пусть $m \geq 5$. Если $a_1x, a_5y \in E(G)$, то $\{a_2, a_3, a_4\}$ — стягиваемое множество (все остальные вершины лежат на цикле $a_1xya_5 \dots a_m$). Остается случай, когда $a_5y \notin E(G)$, а значит, $a_5x \in E(G)$. Вспомним, что выше мы доказали, что $a_4y \in E(G)$ и $a_4x \notin E(G)$.

Аналогичное верно для любой пары соседних вершин вместо a_4, a_5. Это означает, что m четно, все вершины цикла с нечетным номером смежны с x, а вершины с четным номером — с y. В этом случае также $U = \{a_2, a_3, a_4\}$ — стягиваемое множество (см. рисунок 8.3c): в графе $G - U$ есть цикл $a_1xa_5 \dots a_m$, проходящий по всем вершинам, кроме y, а вершина y смежна с x и a_6.

2. *Для любого множества $W \in \mathcal{W}$ граф H_W — не простой цикл.* Тогда граф H_W двусвязен и по лемме 8.5 имеет хотя бы две крайние части, и все эти части — циклы. Выберем $W = \{x, y\}$ так, чтобы $|\mathrm{N}_G(W)| = p$ было минимальным. Тогда $p \geq 4$. Пусть $A, A' \in \mathrm{Part}(H_W)$ — две крайних части, $\mathrm{Bound}(A) = \{s, t\}$ и вершины из $\mathrm{Int}(A)$ занумерованы $a_1, \dots, a_m$ в направлении от s к t.

Предположим, что $|\mathrm{Int}(A)| \geq 3$. Тогда $p \geq 3 + |\mathrm{Int}(A')| \geq 5$. По лемме 8.5 граф $H = H_W - \mathrm{Int}(A)$ двусвязен. Пусть $L = \{a_1, a_2, a_3\}$. Тогда граф $H' = H_W - L$ получается из H добавлением пути $a_4 \dots a_m$ (при $m \geq 4$). Так как $a_mt, xy \in E(G)$, a_4 смежна с W и, наконец, W смежно со всеми вершинами из $\mathrm{Int}(A')$ (которых хотя бы две), то в графе $G - L$ все вершины, кроме, может быть, одной из вершин множества W, попадают в один блок (см. рисунок 8.4a). Значит, либо теорема доказана, либо не умаляя общности можно предположить, что в графе $G - L$ точка сочленения x отделяет y от остальных вершин. Тогда в трёхсвязном графе G вершина y смежна хотя бы с двумя вершинами из L.

В таком случае, $ya_1 \in E(G)$ или $ya_3 \in E(G)$. Случаи аналогичны, разберем второй (см. рисунок 8.4b). Тогда $W' = \{a_1, a_2\}$ — стягиваемое

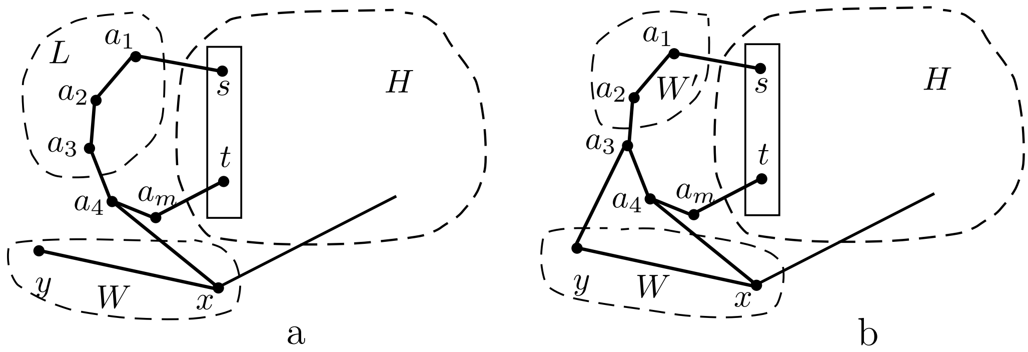


Рис. 8.4: Случай $|\mathrm{Int}(A)| \geq 3$.

множество (граф $G - W'$ очевидно двусвязен), причем $\mathrm{N}_G(W')$ состоит максимум из четырех вершин: это могут быть s, x, y, a_3. Противоречие с минимальностью p.

Остается случай, когда внутренность каждой крайней части $\mathrm{Part}(H_W)$ содержит ровно две вершины. Пусть $L = \mathrm{Int}(A)$. Тогда граф $H = H_W - L$ двусвязен. Пусть вершина x смежна с L. Тогда множество $U = L \cup \{x\}$ связно, а в графе $G - U$ все вершины из H лежат в одном блоке. Если там же лежит и y, то граф $G - U$ двусвязен, в этом случае U — искомое стягиваемое множество из трёх вершин.

Значит, y отделена в графе $G - U$ от H точкой сочленения. Следовательно, y смежна в графе G не более чем с одной вершиной вне L, но тогда y смежна с L и мы аналогично получаем, что x смежна в графе G не более чем с одной вершиной вне L. Рассмотрим аналогично $L' = \mathrm{Int}(A')$ и поймем, что каждая из вершин x и y смежна в графе G не более чем с одной вершиной вне L'. Значит, крайних частей в $\mathrm{Part}(H_W)$ всего две — это A и A' — причем x смежна с одной вершиной из L и одной вершиной из L', а также y смежна с одной вершиной из L и одной вершиной из L'.

В этом случае граф $G - L$ также двусвязен, а значит, множество L — стягиваемое, причем $|\mathrm{N}_G(L)| = 4$. Тогда к L можно применить те же рассуждения, что к W понять, что в графе $G - L$ ровно две крайних части, внутренности которых содержат по две вершины, причем одна из вершин каждой внутренности смежна с a_1, а вторая — с a_2 (иначе теорема доказана). Это возможно лишь в случае, когда внутренности этих крайних частей — это $\{x, y\}$ и $\{s, t\}$, но тогда $d_G(s) = d_G(t) = 3$ и к множеству $\{s, t\}$ можно применить аналогичные рассуждения. И так далее. В результате окажется, что G — регулярный граф степени 3, причем его вершины разбиваются на несколько стягиваемых двухвершинных множеств W_1, ..., W_ℓ (где $\ell \geq 4$, нумерация — циклическая по модулю ℓ), причем любые два соседних множества W_i и W_{i+1} соединены двумя независимыми рёбрами.

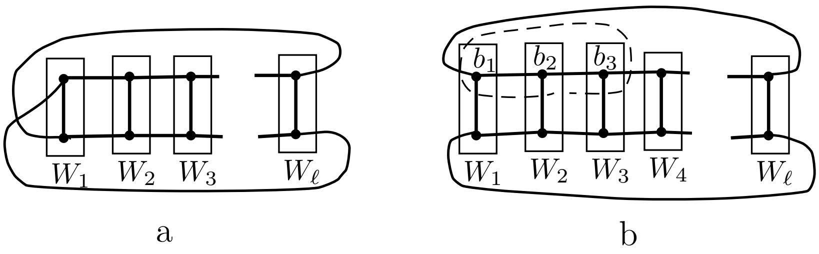


Рис. 8.5: Цикл с диагоналями и два цикла.

Эти ℓ пар независимых рёбер либо образуют цикл длины 2ℓ (см. рисунок 8.5a), либо образуют два цикла длины ℓ (см. рисунок 8.5b). В первом случае граф G — цикл длины 2ℓ с главными диагоналями, тогда три последовательных вершины этого цикла, очевидно, образуют стягиваемое множество. Во втором случае, граф G — это два цикла $b_1b_2\dots b_\ell$ и $c_1c_2\dots c_\ell$ с добавленными рёбрами b_ic_i. При $\ell = 4$ такой граф — это Q_8, граф-исключение в теореме. При $\ell \geq 5$ нетрудно проверить, что $\{b_1, b_2, b_3\}$ — стягиваемое множество. □

Теперь докажем теорему о стягиваемых множествах больших размеров в трёхсвязном графе.

Теорема 8.3. *Пусть $m \geq 4$ — натуральное число, а G — трёхсвязный граф с $v(G) \geq 2m + 1$. Тогда G имеет стягиваемое множество W с $m \leq |W| \leq 2m - 3$.*

Утверждение теоремы без труда выводится из следующей леммы.

Лемма 8.6. *Пусть трёхсвязный граф G на n вершинах имеет стягиваемое множество на $m \geq 3$ вершинах, причем $n \geq 2m+3$. Тогда G имеет стягиваемое множество на m' вершинах, где $m + 1 \leq m' \leq 2m - 1$.*

Доказательство. Пусть $W \subset V(G)$ — стягиваемое множество на m вершинах в трёхсвязном графе G, а $H = G - W$. Рассмотрим два случая.

1. *Граф H является простым циклом.*
Пусть H — это простой цикл $h_1h_2\dots h_t$, где $t \geq m+3$ (нумерация — циклическая по модулю t). Отметим, что $d_G(h_i) \geq 3$, поэтому, все вершины цикла H смежны в графе G с множеством W. Граф $F = G(W)$ связен.

Рассмотрим вершины h_i и h_{m+i+2}, пусть они смежны соответственно с вершинами $x, y \in W$. Пусть $L = \{h_{i+1}, h_{i+2} \dots, h_{m+i+1}\}$ — множество из $m+1$ вершин, а P — это xy-путь в графе $F = G(W)$. Тогда в графе $G' = G - L$ все вершины пути P и множества $V(H) \setminus L$ лежат на простом цикле (см. рисунок 8.6a), а значит, в одном блоке B графа G'.

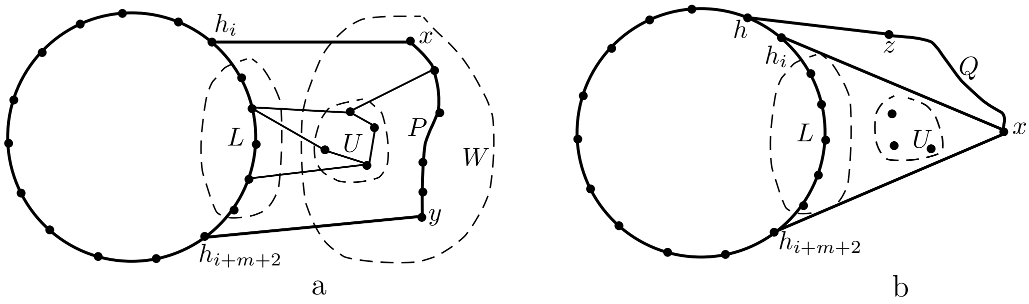


Рис. 8.6: Граф H — цикл

Пусть U — множество всех не лежащих в блоке B вершин графа G', тогда $U \subset W \setminus \{x, y\}$. Если множество U непусто, то оно есть объединение множеств вершин нескольких блоков графа G', отличных от B. Для каждого такого блока B' есть точка сочленения a', отделяющая его от B. Так как граф $G - a'$ связен, в графе G существует путь от блока B' до L, не проходящий по вершинам блока B. Следовательно, для множества $W' = L \cup U$ граф $G(W')$ связен, а граф $G - W' = B$ двусвязен. Кроме того,

$$m+1 = |L| \le |W'| = |L|+|U| \le |L|+|W \setminus \{x, y\}| \le (m+1)+(m-1). \quad (8.1)$$

Если последнее неравенство (8.1) — строгое, то множество W' нам подходит. Остаётся случай, когда это неравенство обращается в равенство, тогда $|U| = m - 1 = |W| - 1$, следовательно, $x = y$ и $U = W \setminus \{x\}$. Таким образом, либо доказательство теоремы окончено, либо вершины x и y нельзя выбрать различными, то есть, каждая из вершин h_i и h_{m+i+1} смежна только с одной вершиной из W — с x (см. рисунок 8.6b). Предположим, что хотя бы одна из вершин h множества $V(H) \setminus L$ смежна с отличной от x вершиной $z \in W$ и рассмотрим путь Q от z до x в связном графе F. Так как $h, x \in V(B)$, то все вершины пути Q лежат в B, в частности, $z \in B$. Тогда $U \subset W \setminus \{x, z\}$, а значит, $|U| \le m-2$ и множество W' нам подходит.

Остаётся случай, когда все вершины из $h_{m+i+2}, \dots, h_i$ (их хотя бы две) смежны только с одной вершиной из W — с x. Рассмотрев аналогично вершины h_{i-1} и h_{m+i+1} вместо h_i и h_{m+i+2} и проделав те же рассуждения, мы получим, что и h_{m+i+1} смежна в W только с x. Действуя аналогично, несложно понять, что все вершины цикла H должны быть смежны в W только с x, что противоречит трёхсвязности графа G. Разбор случая завершён.

2. *Граф H не является простым циклом.*
Предположим, что утверждение теоремы не выполнено. Тогда, в частности, в графе G нет стягиваемого множества на $m+1$ вершине, поэтому, можно применить лемму 8.5. Пусть A — крайняя часть графа H. Рассмотрим два случая.

2.1. $|\mathrm{Int}(A)| < m$.
Рассмотрим множество $W' = W \cup |\mathrm{Int}(A)|$. Тогда граф $G(W')$ по пункту 1 леммы 8.5 связен, а граф $G - W' = H - \mathrm{Int}(A)$ по пункту 3 леммы 8.5 двусвязен. Для завершения доказательства остаётся лишь добавить, что $m = |W| < |W'| \le 2m - 1$.

2.2. $|\mathrm{Int}(A)| \ge m$.
Пусть $\mathrm{Bound}(A) = \{s, s'\}$. По пункту 2 леммы 8.5 часть A — цикл, пусть вершины из $\mathrm{Int}(A)$ следуют по циклу в порядке $a_1 \dots a_t$ от s к s'.

Положим $L = \{a_1, \dots, a_m\}$. Рассмотрим граф $H' = G - L$. Предположим, что граф H' недвусвязен. По пункту 3 леммы 8.5 граф $H - \mathrm{Int}(A)$ двусвязен, следовательно, все вершины этого графа лежат в одном блоке B графа H'. Граф H имеет отличную от A крайнюю часть A'. Выберем две различные вершины $d, d' \in \mathrm{Int}(A')$. Тогда существуют вершины $x, x' \in W$, смежные с d и d', соответственно (см. рисунок 8.7). Если $t > m$, то существует вершина $y \in W$, смежная с $a_{m+1} \in \mathrm{Int}(A)$. В связном графе $F = G(W)$ есть xx'-путь P и xy-путь Q (при $t > m$). Концы пути $dxPx'd'$ — различные вершины блока B, поэтому, $x, x' \in V(B)$. При $t > m$ отметим, что $d \ne s'$, так как s' принадлежит одиночному множеству $\{s, s'\}$ и, следовательно, не может быть внутренней вершиной части графа H. Тогда концы пути $dxQya_{m+1} \dots a_t s'$ — различные вершины блока B, а значит, $a_{m+1}, \dots, a_t \in V(B)$.

Следовательно, все не лежащие в B вершины графа H' лежат в непустом множестве $M \subsetneq W$. Каждая компонента связности U графа $G(M)$ отделяется от B точкой сочленения, а потому, в виду трёхсвязности графа G компонента U должна быть смежна с L. Рассмотрим множество $W' = L \cup M$. Граф $G(W')$ связен, а граф $G - W' = B$ двусвязен, причём

$$m = |L| < |W'| = |L| + |M| \le |L| + |W \setminus \{x\}| \le 2m - 1.$$

Таким образом, множество W' нам подходит.

Остается рассмотреть случай, когда граф H' двусвязен. Тогда L — стягиваемое множество графа G из m вершин. Если граф H' — простой

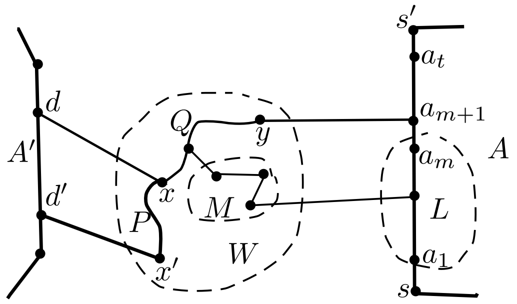


Рис. 8.7: Граф H — не цикл, $|\mathrm{Int}(A)| \geq m$

цикл, воспользуемся рассуждениями пункта 1. Если нет, то еще раз применим лемму 8.5 — граф H имеет хотя бы две крайних части $D_1, \ldots, D_k$, множества внутренних вершин которых не пересекаются. По построению, $\mathrm{N}_G(L) \subset W \cup \{s, a_{m+1}\}$ при $t > m$ и $\mathrm{N}_G(L) \subset W \cup \{s, s'\}$ при $t = m$. По пункту 1 леммы 8.5

$$\bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Int}(D_i) \subset \mathrm{N}_G(L), \quad \text{откуда следует} \quad \sum_{i=1}^{k} |\mathrm{Int}(D_i)| \leq m + 2 < 2m.$$

Значит, граф H' имеет крайнюю часть, во внутренности которой менее m вершин. Теперь для завершения доказательства воспользуемся рассуждениями пункта 2.1 для этой части. □

Доказательство теоремы 8.3. Рассмотрим наибольшее $s \leq m$, такое что граф G имеет стягиваемое множество U на s ыершинах. Если $s = m$, теорема доказана. Пусть $s \leq m - 1$. По лемме 8.6, there exists another contractible set U', such that $s + 1 \leq |U'| \leq 2s - 1 \leq 2m - 3$. В силу максимальности s мы имеем $|U'| > m$. Таким образом, множество U' нам подходит и теорема доказана. □

Глава 9

Структура k-связного графа

В этой главе с помощью определенных ранее древовидных структур исследуется взаимное расположение k-вершинных разделяющих множеств в k-связном графе. Напомним, что многочисленные проблемы возникают из-за наличия пар зависимых — разделяющих друг друга — множеств. К сожалению, в отличие от случая двусвязного графа, нам не удастся дать полное описание структуры k-связного графа. Все же случай произвольного k намного сложнее.

Сначала мы определим компоненты зависимости и опишем их взаимное расположение с помощью гипердерева. Части разбиения k-связного графа G множеством $\mathfrak{R}_k(G)$ будут описаны через части разбиения графа компонентами зависимости $\mathfrak{R}_k(G)$. К сожалению, сами компоненты зависимости могут быть весьма сложными.

Во второй части главы мы дадим определение немного странного на первый взгляд, но весьма важного понятия — ромашки. Может показаться, что это слишком частный случай, чтобы его столько подробно рассматриваит, но уже в следующей главе, где мы рассмотрим случай трёхсвязного графа, будет видна важная роль ромашек в структуре связности графа.

9.1 Компоненты зависимости

В этом разделе G — k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$.

Определение 9.1. 1) *Граф зависимости* $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$ набора $\mathfrak{S}$ — это граф, вершины которого соответствуют множествам набора, а две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им множества зависимы.

2) Будем называть *компонентой зависимости* набора $\mathfrak{S}$ любой набор $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, состоящий из всех множеств, соответствующих вершинам одной из компонент связности графа зависимости $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$.

Мы изучим взаимное расположение компонент зависимости набора $\mathfrak{S}$ с помощью доказанной ранее теоремы о разбиении.

Перед основными теоремами раздела нам необходимо доказать несколько лемм.

Определение 9.2. Назовем наборы $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ *независимыми*, если они не пересекаются и любые два множества $S \in \mathfrak{S}$ и $T \in \mathfrak{T}$ независимы.

Понятно, что любые две компоненты зависимости набора $\mathfrak{S}$ независимы.

Лемма 9.1. *Пусть наборы $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ независимы, а граф зависимости $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$ связен. Тогда все множества набора $\mathfrak{S}$ лежат в одной части $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$, а никакая другая часть из $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ не содержит ни одного множества набора $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество $T \in \mathfrak{T}$. Так как T и любое множество $S \in \mathfrak{S}$ независимы, то каждое такое S целиком содержится в некоторой части из $\mathrm{Part}(T)$. Если две части $A, A' \in \mathrm{Part}(T)$ содержат S, то $S \subset A \cap A' \subset T$, откуда следует, что $S = T$, что невозможно. Значит, содержащая множество $S \in \mathfrak{S}$ часть $\mathrm{Part}(T)$ единственна.

Пусть множества $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}$ лежат в разных частях $A_1, A_2 \in \mathrm{Part}(T)$, соответственно (см. рисунок 9.1). Тогда $S_2 \cap \mathrm{Int}(A_1) = \varnothing$, следовательно, по лемме 3.2 множество S_2 не разделяет часть A_1, а значит и множество S_1. Таким образом, множества S_1 и S_2 независимы.

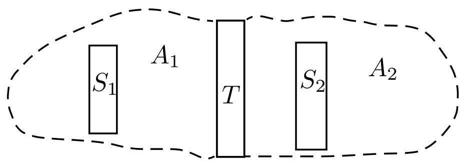


Рис. 9.1: Множества S_1 и S_2 из разных частей $\mathrm{Part}(T)$.

Отсюда в силу связности графа зависимости $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$ следует, что все множества набора $\mathfrak{S}$ содержатся в одной части из $A_T \in \mathrm{Part}(T)$. Выше доказано, что отличная от A_T часть $\mathrm{Part}(T)$ не может содержать ни одного множества из $\mathfrak{S}$. Так как это утверждение верно для любого множества $T \in \mathfrak{T}$, то $A = \cup_{T \in \mathfrak{T}} A_T$ — единственная часть $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$, содержащая все множества набора $\mathfrak{S}$. $\square$

Лемма 9.2. *Пусть наборы* $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ *независимы. Пусть часть* $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ *содержит все множества набора* $\mathfrak{S}$*, а часть* $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *содержит все множества набора* $\mathfrak{T}$*. Тогда* B *содержит объединение всех отличных от* A *частей из* $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$*.*

Доказательство. Рассмотрим отличную от A часть $A' \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$. Если $\mathrm{Int}(A') = \varnothing$, то A' состоит из вершин множеств набора $\mathfrak{T}$ и, следовательно, содержится в B. Далее будем рассматривать случай, когда $\mathrm{Int}(A') \neq \varnothing$. По теореме 3.3 существует представление

$$A' = \cap_{T\in\mathfrak{T}} A'_T, \quad \text{где} \quad A'_T \in \mathrm{Part}(T).$$

Рассмотрим любое множество $S \in \mathfrak{S}$: оно отделено каким-то множеством $T \in \mathfrak{T}$ от части A', следовательно, $S \cap \mathrm{Int}(A'_T) = \varnothing$. По лемме 3.2 тогда существует такая часть $A'_S \in \mathrm{Part}(S)$, что $A'_S \supset A'_T \supset A'$ (см. рисунок 9.2). Множество вершин $M = \cap_{S\in\mathfrak{S}} A'_S$ содержит A'. Так как M невозможно разделить никаким множеством набора $\mathfrak{S}$, то существует часть $B' \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, содержащая M, и, следовательно, содержащая A'.

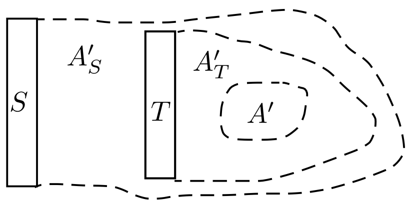


Рис. 9.2: Части A', A'_T и A'_S.

Предположим, что $B' \neq B$. Граница части $A' \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ состоит из вершин множеств набора $\mathfrak{T}$ и, следовательно, содержится в B. Таким образом, из $B' \neq B$ следует

$$\mathrm{Bound}(A') \subset B \cap B' \subset S \in \mathfrak{S},$$

откуда в силу непустоты части A' имеем $\mathrm{Bound}(A') = S$. Однако, по условию $S \subset A$, следовательно,

$$S \subset A \cap A' \subset T \in \mathfrak{T},$$

откуда $S \in \mathfrak{T}$, что невозможно. Следовательно, сделанное выше предположение невозможно и $A' \subset B$. $\square$

До конца этого раздела мы будем считать, что $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_m$ — все компоненты зависимости набора $\mathfrak{S}$. Множество всех компонент зависимости обозначим через $\mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$.

Определение 9.3. Будем говорить, что часть $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}_i)$ содержит компоненту зависимости $\mathfrak{S}_j$, если она содержит все входящие в $\mathfrak{S}_j$ множества. Такая часть существует и единственна по лемме 9.1, обозначим ее через $A_{i\supset j}$.

Переформулируем утверждение леммы 9.2 на языке компонент зависимости.

Следствие 9.1. *Часть $A_{i\supset j}$ содержит объединение всех частей $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}_j)$, кроме $A_{j\supset i}$.*

Каждой компоненте зависимости $\mathfrak{T} \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ поставим в соответствие разбиение $\mathrm{Comp}(\mathfrak{S})_{\mathfrak{T}}$ остальных компонент зависимости на классы: каждый класс будут образовывать компоненты зависимости, содержащиеся в одной из частей $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$.

В следующей теореме мы описали структуру взаимного расположения компонент зависимости с помощью гипердерева.

Определение 9.4. Гиперграф описанного выше разбиения $\mathrm{Struct}(\mathrm{Comp}(\mathfrak{S}))$ мы будем называть *гиперграфом компонент зависимости* набора $\mathfrak{S}$ и для простоты обозначать через $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$.

Теорема 9.1. 1) *Гиперграф компонент зависимости* $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$ *является гипердеревом.*

2) *Пусть $\mathfrak{T} \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$, а $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ — компоненты связности гиперграфа* $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S}) - \mathfrak{T}$. *Тогда компоненты зависимости из множества $\mathcal{C}_i$ содержатся в одной части $B_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$, причем $B_i \neq B_j$ при $i \neq j$.*

3) *Пусть $\mathfrak{T} \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$, а часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ содержит хотя бы одно множество из $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}$. Тогда существует единственное гиперребро гиперграфа* $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$, *вершинами которого являются $\mathfrak{T}$ и несколько (быть может, одна) компонент зависимости, лежащих в части A.*

Доказательство. 1) и 2) Проверим выполнение условия из теоремы 4.5 для описанного выше разбиения множества $\mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$. Пусть компонента зависимости $\mathfrak{S}_i$ разделяет $\mathfrak{S}_j$ и $\mathfrak{S}_\ell$, то есть, части $A_{i\supset j}$ и $A_{i\supset \ell}$ различны. Тогда по следствию 9.1 мы имеем $A_{j\supset i} \supset A_{i\supset \ell}$, то есть, $\mathfrak{S}_j$ не разделяет $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{S}_\ell$. Теперь утверждения 1 и 2 настоящей теоремы следуют из теоремы 4.5.

3) Как показано выше, для каждой компоненты из $\mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ либо все ее множества содержатся в A, либо ни одно из них не лежит в A. Из условия следует, что множество $\mathcal{C}_A \subset \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ компонент зависимости, все множества которых содержатся в A, непусто. Из пунктов 1 и 2 следует, что компоненты зависимости из $\mathcal{C}_A$ образуют компоненту связности

гиперграфа $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S}) - \mathfrak{T}$. Теперь пункт 3 настоящей теоремы следует из пункта 3 теоремы 4.4. □

Далее мы опишем части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ с помощью гиперребер гипердерева $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$. Нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

Следствие 9.2. *Пусть $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, граф зависимости $\mathrm{Dep}(\mathfrak{T})$ связен, множество $T \in \mathfrak{R}_k(G) \setminus \mathfrak{T}$ является границей части $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$, а все множества набора $\mathfrak{T}$ лежат в части $F \in \mathrm{Part}(T)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Часть B представляет собой объединение всех частей из $\mathrm{Part}(T)$, кроме F.*

2) *Никакая отличная от B часть из $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ не содержит множество T.*

Доказательство. 1) Очевидно, наборы $\mathfrak{T}$ и $\{T\}$ независимы. По лемме 9.2 часть B содержит объединение всех отличных от F частей из $\mathrm{Part}(T)$. Так как часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ с границей T есть объединение нескольких (но не всех) частей $\mathrm{Part}(T)$, мы получаем утверждение следствия.

2) По лемме 9.1 никакая отличная от B часть из $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ не может содержать множество T. □

Лемма 9.3. *Пусть графы зависимости непересекающихся наборов $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{R}_k(G)$ связны, а множество $R \in \mathfrak{R}_k(G) \setminus (\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2)$ таково, что все вершины множеств из $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ содержатся в одной части $F \in \mathrm{Part}(R)$ и существует часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T}_1) \cap \mathrm{Part}(\mathfrak{T}_2)$ с границей R. Тогда наборы $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ не являются независимыми.*

Доказательство. Предположим противное, пусть наборы $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ независимы. По следствию 9.2 часть A является объединением всех отличных от F частей из $\mathrm{Part}(R)$. По лемме 9.1 все множества набора $\mathfrak{T}_1$ лежат в одной части $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T}_2)$. Поскольку множество $R \subset \cup_{T \in \mathfrak{T}_1} T$ также лежит в B, то по пункту 2 следствия 9.2 имеем $A = B$. Однако, все множества набора $\mathfrak{T}_1$ лежат в F, причем $F \cap A = R$. Следовательно, все эти множества совпадают с R, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Определение 9.5. Пусть R — гиперребро $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$. Для всех $\mathfrak{S}_i \in R$ пусть $A_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}_i)$ — главная часть, к которой относятся остальные компоненты гиперребра R. Назовём множество

$$A_R = \bigcap_{\mathfrak{S}_i \in R} A_i$$

частью, соответствующей гиперребру R.

Лемма 9.4. *Для любого гиперребра* $R = \{\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n\}$ *гиперграфа* $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$ *выполнено одно из двух утверждений.*

1° $A_R \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, $|A_R| \ge k$ *и* $\mathrm{Bound}(A_R) = \cup_{i=1}^n \mathrm{Bound}(A_i)$.

2° $n = 2$, $\mathrm{Bound}(A_1) = \mathrm{Bound}(A_2) = A_R \in \mathfrak{S}$, *причем одна из компонент зависимости* $\mathfrak{S}_1$ *или* $\mathfrak{S}_2$ *— это* $\{A_R\}$.

Доказательство. Рассмотрим любую компоненту зависимости $\mathfrak{S}_\ell$, не входящую в R (если такая существует). По пункту 6 теоремы 4.4 существует компонента зависимости $\mathfrak{S}_i \in R$, которая отделяет $\mathfrak{S}_\ell$ от компонент зависимости, входящих в R. Тогда по утверждению 2 теоремы 9.1 мы имеем $A_{i\supset\ell} \ne A_i$. Таким образом, ни одно из множеств набора $\mathfrak{S}_\ell$ не может содержаться в A_i, а стало быть, и в A_R.

По следствию 9.1 из $A_{i\supset\ell} \ne A_i$ следует, что $A_{\ell\supset i} \supset A_i \supset A_R$. Следовательно, множества компонент зависимости, не принадлежащих гиперребру R, не разделяют A_R. Тогда по теореме 3.3 либо $A_R \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, либо A_R — подмножество одного из множеств набора $\mathfrak{S}$. Поскольку для всех $i \in \{1, \dots, n\}$

$$A_i \supset \cup_{j=1}^n \mathrm{Bound}(A_j), \quad \text{то} \quad A_R \supset \cup_{j=1}^n \mathrm{Bound}(A_j),$$

откуда $|A_R| \ge k$ (для любого j часть A_j непуста, следовательно, $|\mathrm{Bound}(A_j)| \ge k$).

Пусть $A_R \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Рассмотрим вершину $x \in \mathrm{Bound}(A_R)$. По теореме 3.1 существует вершина $y \notin A_R$, смежная с x. Не умаляя общности предположим, что $y \notin A_i$. Тогда по теореме 3.1 мы имеем $x \in \mathrm{Bound}(A_i)$. Каждая вершина из $\cup_{i=1}^n \mathrm{Bound}(A_i)$ принадлежит части A_R и какому-то из множеств набора $\mathfrak{S}$, поэтому $\mathrm{Bound}(A_R) = \cup_{i=1}^n \mathrm{Bound}(A_i)$.

Пусть $A_R \notin \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Тогда из сказанного выше следует, что

$$\mathrm{Bound}(A_1) = \mathrm{Bound}(A_2) \cdots = \mathrm{Bound}(A_n) = A_R \in \mathfrak{S}.$$

Из доказанного выше следует, что содержащееся в A_R множество из $\mathfrak{S}$ должно принадлежать одной из компонент зависимости гиперребра R. Тогда не умаляя общности можно считать, что $A_R \in \mathfrak{S}_1$.

Так как $A_R = \mathrm{Bound}(A_1)$ — граница части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}_1)$, то A_R и любое множество набора $\mathfrak{S}_1$ — независимы, откуда следует, что $\mathfrak{S}_1 = \{A_R\}$. Предположим, что $n \ge 3$. По следствию 9.2 множество B, равное объединению всех отличных от A_1 частей из $\mathrm{Part}(A_R)$, принадлежит $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}_2) \cap \mathrm{Part}(\mathfrak{S}_3)$. Тогда по лемме 9.3 граф зависимости $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S}_2 \cup \mathfrak{S}_3)$ связен, что невозможно. $\square$

Теорема 9.2. *Пусть G — k-связный граф, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Пусть $\mathfrak{S}' \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ и часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ таковы, что A не содержит множеств из $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}'$. Тогда $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.*

2) *Пусть $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Тогда либо часть H соответсвует некоторому гиперребру R гипердерева $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$, либо существует такая компонента зависимости $\mathfrak{S}' \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$, что $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$.*

Доказательство. 1) Так как часть A не содержит множеств из $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}'$, то по лемме 9.2 ни одно из этих множеств не разделяет A. Тогда по следствию 3.4 мы имеем $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.

2) Докажем утверждение индукцией по количеству компонент зависимости в наборе. База для случая, когда компонента зависимости одна, очевидна. Докажем переход. Пусть $\mathfrak{T} \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ — компонента зависимости, соответствующая крайней вершине гипердерева $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$; эта компонента зависимости не разделяет никакие две другие и по теореме 4.5 принадлежит ровно одному гиперребру R гипердерева $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$.

Утверждение пункта 2 для набора $\mathfrak{T}' = \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}$ уже доказано. Пусть часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ содержит все множества набора $\mathfrak{T}'$, а часть $B' \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T}')$ содержит все множества набора $\mathfrak{T}$. По теореме 3.3 для любой части $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ существует представление $H = H_1 \cap H_2$, где $H_1 \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ и $H_2 \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T}')$.

Если $H_1 = B$ и $H_2 = B'$, то H — часть, соответствующая гиперребру R. По лемме 9.2 часть B содержит объединение всех отличных от B' частей из $\mathrm{Part}(\mathfrak{T}')$, а часть B' содержит объединение всех отличных от B частей из $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$. Тогда по следствию 3.4 остальные части из $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ — это либо части из $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$, либо части из $\mathrm{Part}(\mathfrak{T}')$, откуда очевидно следует доказываемое утверждение. $\square$

Теорема 9.3. *Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, $\mathfrak{T} \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$, $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$. Тогда существует такая часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, что $\mathrm{Bound}(B) \supset \mathrm{Bound}(A)$.*

Доказательство. Если часть A не содержит множеств из $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}$, то по части 1 теоремы 9.2 мы имеем $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ и часть $B = A$ нам подходит.

Пусть часть A содержит хотя бы одно множество из $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}$. Тогда по теореме 9.1 существует такое гиперребро гипердерева $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$, что одной из его вершин является $\mathfrak{T}$, а все остальные вершины этого гиперребра — компоненты зависимости, содержащиеся в A. Тогда по пункту 2 леммы 9.4 либо существует такая часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, что $\mathrm{Bound}(B) \supset \mathrm{Bound}(A)$, либо $\{\mathrm{Bound}(A)\} \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$.

Рассмотрим второй случай, пусть $\mathrm{Bound}(A) = R$. Если существует часть $B \in \mathrm{Part}(R)$, не содержащая множеств из $\mathfrak{S} \setminus \{R\}$, то по пункту 1 теоремы 9.2 мы имеем $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ и часть B нам подходит.

Наконец, пусть $\mathrm{Part}(R) = \{H_1, \dots, H_n\}$ и каждая из часть H_i содержит хотя бы одну компоненту зависимости из $\mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$, отличную от $\{R\}$. Тогда для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ по теореме 9.1 существует такое гиперребро R_i гипердерева $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$, что одной из его вершин является $\{R\}$, а все остальные вершины этого гиперребра — компоненты зависимости, содержащиеся в H_i. Если гиперребру R_i соответствует часть $B_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, то по лемме 9.2 мы имеем $\mathrm{Bound}(B_i) \supset \mathrm{Bound}(H_i) \supset R$ и часть B_i нам подходит. Остается единственная возможность: $R_i = \{\{R\}, \mathfrak{S}_i\}$ и существует часть $F_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}_i)$ с $\mathrm{Bound}(F_i) = R$ (для всех $i \in \{1, \dots, n\}$). Никакая отличная от F_i часть $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}_i)$ не содержит R.

С другой стороны, R не разбивается множествами из $\mathfrak{S}$, и потому существует такая часть $D \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, что $D \supset R$. По теореме 3.3

$$D = \bigcap_{\mathfrak{T} \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})} D_{\mathfrak{T}}, \quad \text{где} \quad D_{\mathfrak{T}} \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T}).$$

Тогда для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ мы имеем $D_{\mathfrak{S}_i} \supset R$, а значит, $D_{\mathfrak{S}_i} = F_i$. Однако, несложно понять, что $\cap_{i=1}^{n} F_i = R$, поэтому, $D = R$. В этом случае часть $B = D$ нам подходит. $\square$

Определение 9.6. Назовем компоненту зависимости набора $\mathfrak{S}$ *крайней*, если она соответствует висячей вершине гипердерева $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$.

Замечание 9.1. 1) У любого набора $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ с несвязным графом зависимости — хотя бы две крайних компоненты зависимости.

2) Из теоремы 9.1 следует, что компонента зависимости $\mathfrak{S}'$ набора $\mathfrak{S}$ не разделяет никакие две компоненты зависимости этого набора тогда и только тогда, когда она является крайней.

9.2 Ромашки

Перейдем к определению *ромашки*. Не удивляйтесь, сначала определяемый объект может показаться вам несколько странным и может возникнуть вопрос: а зачем изучать этот частный случай. Дальше мы постараемся показать значение ромашек. С их помощью мы опишем структуру взаимного расположения трехвершинных разделяющих множеств в трехсвязном графе. Перейдем к определению. Напомним, что мы имеем дело с k-связным графом G, где $k \geq 2$.

Пусть $m \geq 4$, а множества $P, Q_1, \dots, Q_m \subset V(G)$ таковы, что для всех $i \in \{1, \dots, m\}$ выполнено

$$0 \leq |P| < k, \quad |Q_i| = \frac{k - |P|}{2}, \quad P \cap Q_i = \varnothing \quad \text{и} \quad Q_i \not\subset \bigcup_{j \neq i} Q_j.$$

Рассмотрим набор $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$, в котором множества $Q_1, \dots, Q_m$ считаются циклически упорядоченными. А именно, мы будем считать, что циклическая перестановка множеств $Q_1, \dots, Q_m$ не меняет набора F. Кроме того, мы будем считать наборы $(P; Q_1, \dots, Q_m)$ и $(P; Q_m, \dots, Q_1)$ одинаковыми.

Введем обозначение $Q_{i,j} = Q_i \cup Q_j \cup P$. Пусть $\mathfrak{R}(F)$ — набор, состоящий из множеств $Q_{i,j}$ для всех пар различных несоседних в циклическом порядке индексов i и j.

Определение 9.7. Пусть существует такое множество $\mathfrak{S} \subset (\mathfrak{R}(F) \cap \mathfrak{R}_k(G))$, что

$$\mathrm{Part}(\mathfrak{S}) = \{G_{1,2}, G_{2,3}, \dots, G_{m,1}\}, \quad \text{причем}$$
$$\mathrm{Bound}(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1} \quad \text{для всех} \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Тогда назовем набор F *ромашкой*, множество P — *центром*, а множества $Q_1, \dots, Q_m$ — *лепестками* этой ромашки. Если никакие два лепестка ромашки F не пересекаются, то назовем эту ромашку *правильной*. Будем говорить, что набор $\mathfrak{S}$ *порождает* ромашку F.

Далее мы зафиксируем нумерацию лепестков ромашки F для удобства.

Одну и ту же ромашку могут порождать различные наборы разделяющих множеств. Ниже мы докажем, что если наборы $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$ порождают ромашку F, то $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}) = \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$. Мы будем называть это разбиение *разбиением графа G ромашкой F* и обозначать через $\mathrm{Part}(F)$.

Также будет доказано, что если F — ромашка, то $\mathfrak{R}(F) \subset \mathfrak{R}_k(G)$. При $k \leq 3$ имеет место совпадение $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}(F)) = \mathrm{Part}(F)$, что не всегда верно при $k \geq 4$.

Введенные выше обозначения будем считать стандартными для ромашки. Лепестки ромашки всегда будем указывать в циклическом порядке и рассматривать их индексы, как вычеты по модулю количества лепестков. Распо

ложим лепестки Q_1, Q_2, $\dots$, Q_m по окружности соответственно их циклическому порядку и поместим в центр окружности центр ромашки P. Между лепестками Q_i и Q_{i+1} мы поместим часть $G_{i,i+1}$. На рисунке изображено разбиение графа ромашкой с восемью лепестками. Введем обозначение $G_{i,j} = \cup_{x=i}^{j-1} G_{x,x+1}$ (индекс x пробегает значения от i до $j-1$ в циклическом порядке). В теореме 9.4 мы докажем, что множество $Q_{i,j}$ отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$ то есть, разбивает граф именно так, как соответствующая этому множеству ломаная разбивает круг.

Посмотрим, какими могут быть ромашки при малых k. Нетрудно понять, что у любой ромашки в двусвязном графе центр пуст, а каждый лепесток является одиночной вершиной. Таким образом, ромашка представляет из себя "цикл", хорды которого соответствуют разделяющим множествам. Именно такая конструкция стала одной из главных, с помощью которых В. Т. Татт в 1966 году описал структуру взаимного расположения двухвершинных разделяющих множеств в двусвязном графе. Далее мы приведем достаточно простое и наглядное описание структуры двусвязного графа с помощью ромашек.

Нетрудно понять, что у любой ромашки в трехсвязном графе и центр, и лепестки являются одиночными вершинами, такая ромашка напоминает "колесо".

При больших k ромашки устроены значительно сложнее: и лепестки, и центр могут состоять из нескольких вершин. Уже при $k = 4$ возможны два разных типа ромашек: во-первых, центр может содержать две вершины, а лепестки по одной вершине. Во-вторых, центр ромашки может быть пустым, а лепестки могут содержать по две вершины.

Докажем ряд свойств ромашек при всех k.

Лемма 9.5. *Граф зависимости любого набора k-разделяющих множеств, порождающего ромашку, связен.*

Доказательство. Пусть $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$ и набор $\mathfrak{S}$ порождает ромашку F. Тогда $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}) = \{G_{1,2}, G_{2,3}, \dots, G_{m,1}\}$, $\mathrm{Bound}(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1}$.

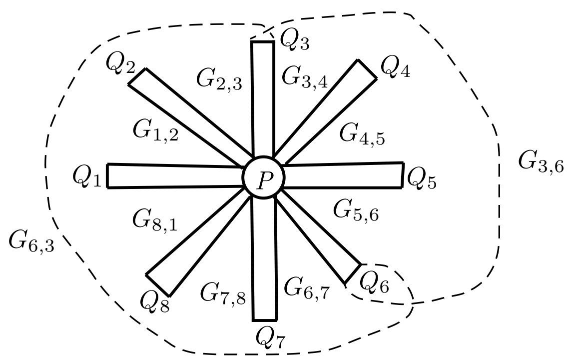


Рис. 9.3: Разбиение графа ромашкой с восемью лепестками.

Предположим, что граф $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$ несвязен и рассмотрим любую компоненту зависимости $\mathfrak{S}'$ набора $\mathfrak{S}$. Рассмотрим множество $Q_{i,j} \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}'$. Так как $Q_{i,j}$ и любое множество набора $\mathfrak{S}'$ независимы, то существует часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$, содержащая $Q_{i,j}$.

Из определения ромашки следует, что ни одно из множеств набора $\mathfrak{S}$ не разбивает никакой лепесток ромашки. Следовательно, $\mathrm{Bound}(A)$ состоит из центра и нескольких лепестков ромашки. Отметим, что ни одна из частей $G_{x,x+1} \in \mathrm{Part}(F)$ не содержит $Q_{i,j}$. Действительно, по определению внутренности $\mathrm{Int}(G_{x,x+1}) \cap Q_{i,j} = \varnothing$. Как минимум один из лепестков множества $Q_{i,j}$ (не умаляя общности можно считать, что Q_i) не совпадает ни с Q_x, ни с Q_{x+1}. Тогда по определению ромашки $Q_i \not\subset Q_{x,x+1}$. Таким образом, $A \notin \mathrm{Part}(F)$, а значит, A — это объединение нескольких (хотя бы двух) частей $\mathrm{Part}(F)$.

Предположим, что одна из частей $G_{s-1,s}$ и $G_{s,s+1}$ лежит в A, а другая — нет. Так как множества набора $\mathfrak{S}'$ не разделяют ни $G_{s-1,s}$, ни $G_{s,s+1}$, одно из этих множеств обязательно должно содержать лепесток $Q_s = G_{s-1,s} \cap G_{s,s+1}$, а следовательно, $Q_s \subset \mathrm{Bound}(A)$. Назовем такой лепесток Q_s *граничным.* Несложно понять, что $\mathrm{Bound}(A)$ содержит объединение центра и нескольких (хотя бы двух) граничных лепестков.

Предположим, что граничных лепестков всего два, и они — соседние. Пусть, скажем, $\mathrm{Bound}(A) = Q_{x,x+1}$. Тогда из $A \notin \mathrm{Part}(F)$ следует, что $A = G_{x+1,x}$. Но, так как $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$, ее внутренность не пересекается с множествами набора $\mathfrak{S}'$, а значит, все эти множества лежат в $Q_{x,x+1}$, что, очевидно, невозможно. Противоречие.

Значит, $\mathrm{Bound}(A)$ содержит какие-то два несоседних лепестка Q_x и Q_y. По теореме 9.3 тогда существует такая часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, что $\mathrm{Bound}(B) \supset \mathrm{Bound}(A) \supset Q_x \cup Q_y$, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Теорема 9.4. *Пусть $F = (P; Q_1, \ldots, Q_m)$ — ромашка. Тогда $\mathfrak{R}(F) \subset \mathfrak{R}_k(G)$, причем $Q_{i,j}$ отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$.*

Доказательство. Пусть набор $\mathfrak{S}$ порождает ромашку F, тогда

$$\mathrm{Part}(\mathfrak{S}) = \{G_{1,2}, G_{2,3}, \ldots, G_{m,1}\}, \quad \mathrm{Bound}(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1}.$$

Пусть $Q_{i,j} \in \mathfrak{S}$. Тогда множество $Q_{i,j}$ не разделяет ни одну из частей $G_{x,x+1}$. Следовательно, оно не разделяет ни $G_{i,j}$, ни $G_{j,i}$. Отсюда следует, что $\mathrm{Part}(Q_{i,j}) = \{G_{i,j}, G_{j,i}\}$.

Назовем множество лепестков M ромашки F *хорошим*, если для любых двух различных лепестков $Q_i, Q_j \in M$ множество $Q_{i,j}$ отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$. Для любого такого поднабора $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, что граф $\mathrm{Dep}(\mathfrak{T})$ связен, мы докажем индукцией по $|\mathfrak{T}|$, что множество всех лепестков, входящих в множества из $\mathfrak{T}$ — хорошее (обозначим это множество лепестков через $L(\mathfrak{T})$).

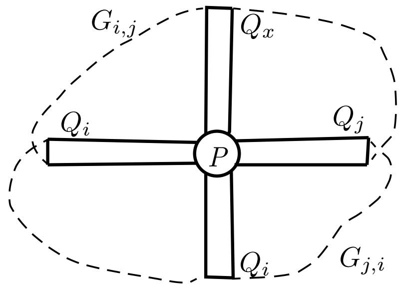


Рис. 9.4: Множество $Q_{i,j}$.

База для поднабора из одного множества уже проверена, докажем переход. В наборе $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, содержащем более одного множества, есть такое множество T, что для набора $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T} \setminus \{T\}$ граф $\mathrm{Dep}(\mathfrak{T}')$ связен. По индукционному предположению, множество лепестков $L(\mathfrak{T}')$ — хорошее. Пусть $T = Q_{i,j}$, тогда достаточно проверить, что для любого лепестка $Q_x \in L(\mathfrak{T}')$ множество $Q_{i,x}$ отделяет $G_{i,x}$ от $G_{x,i}$. Можно считать, что $Q_x \subset G_{i,j}$, $x \notin \{i,j\}$ (см. рисунок 9.4). Как доказано выше, множество $Q_{i,j}$ отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$. Так как граф $\mathrm{Dep}(\mathfrak{T})$ связен, то существует такое множество $R \in \mathfrak{T}'$, что R и $Q_{i,j}$ зависимы; следовательно, $R \cap \mathrm{Int}(G_{j,i}) \neq \varnothing$. Это означает, что $R \cap \mathrm{Int}(G_{j,i}) = Q_y$, где $Q_y \in L(\mathfrak{T}')$ и $y \notin \{i,j\}$. По индукционному предположению, множество $Q_{x,y}$ отделяет $G_{x,y}$ от $G_{y,x}$. Таким образом, множества $Q_{i,j}$ и $Q_{x,y}$ зависимы и по лемме 3.7 множество $Q_{i,x}$ отделяет $G_{i,j} \cap G_{x,y} = G_{i,x}$ от остальных вершин графа (то есть, от $G_{x,i}$).

Так как по лемме 9.5 граф $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$ связен, то теорема доказана. □

Следствие 9.3. *Для ромашки $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$ выполняются следующие утверждения.*

1) *Пусть $j \notin \{i, i+1, i+2\}$. Тогда $G_{i,j} \in \mathrm{Part}(Q_{i,j})$.*

2) *Пусть хотя бы одна из частей $G_{i,i+1}$ или $G_{i+1,i+2}$ непуста. Тогда $G_{i,i+2} \in \mathrm{Part}(Q_{i,i+2})$.*

Доказательство. 1) Так как $Q_{i+1} \not\subset Q_{i,j-1}$, мы имеем $\mathrm{Int}(G_{i,j-1}) \cap Q_{i+1} \neq \varnothing$ и, следовательно, $\mathrm{Int}(G_{i,j-1}) \neq \varnothing$. По теореме 9.4 множество $G_{i,j-1}$ является объединением частей $A_1, \dots, A_\ell \in \mathrm{Part}(Q_{i,j-1})$ (возможно, $\ell = 1$), причем легко видеть, что все эти части непусты, а их внутренности не пересекаются с $Q_{i,j}$. Тогда $Q_{i,j}$ не разделяет ни одну из частей $A_1, \dots, A_\ell$, а следовательно, и их объединение $G_{i,j-1}$. Аналогично, $Q_{i,j}$ не разделяет $G_{i+1,j}$. Теперь понятно, что $Q_{i,j}$ не разделяет $G_{i,j} = G_{i,j-1} \cup G_{i+1,j}$ (см. рисунок 9.5). Так как $Q_{i,j}$ по теореме 9.4 отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$, то $G_{i,j} \in \mathrm{Part}(Q_{i,j})$.

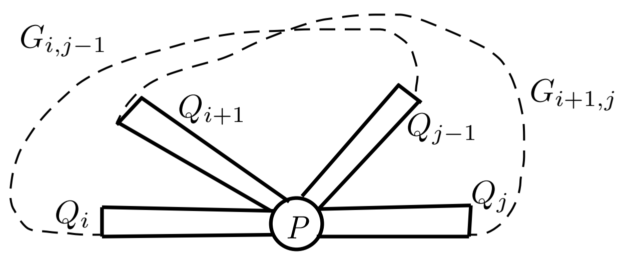


Рис. 9.5: Часть $G_{i,j}$.

2) Множество $Q_{i,i+2}$ не пересекает внутренность ни одной из частей $G_{i,i+1}$ и $G_{i+1,i+2}$. Следовательно, если какая-то из частей $G_{i,i+1}$ и $G_{i+1,i+2}$ непуста, то $Q_{i,i+2}$ не разбивает эту часть. Отсюда очевидно следует утверждение пункта 2. □

Замечание 9.2. 1) Пусть индексы i и j таковы, что

$$j \notin \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}.$$

Из пункта 1 следствия 9.3 понятно, что тогда $\mathrm{Part}(Q_{i,j}) = \{G_{i,j}, G_{j,i}\}$.

2) Пусть $k \leq 3$. Как мы уже отмечали, в этом случае лепестки любой ромашки k-связного графа — одновершинные множества. Тогда из следствия 9.3 для любых двух несоседних в циклическом порядке индексов i, j получается, что $\mathrm{Part}(Q_{i,j}) = \{G_{i,j}, G_{j,i}\}$.

Следствие 9.4. *Для ромашки $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$ выполняются следующие утверждения.*

1) *Если множества $Q_{x,y}$ и $Q_{z,t}$ являются зависимыми разделяющими множествами, то $Q_{x,y}$ отделяет друг от друга лепестки Q_z и Q_t.*

2) *Расположим индексы $1, 2, \dots, m$ по окружности соответственно их циклическому порядку и поставим в соответствие множеству $Q_{i,j}$ хорду этой окружности, соединяющую i и j. Тогда множества $Q_{x,y}$ и $Q_{z,t}$ являются зависимыми k-разделяющими множествами в том и только том случае, когда соответствующие им хорды окружности пересекаются во внутренней точке.*

Доказательство. 1) Пусть множества $Q_{x,y}$ и $Q_{z,t}$ зависимы, но $Q_{x,y}$, скажем, не отделяет Q_z от Q_t. По теореме 9.4 нам известно, что $Q_{x,y}$

отделяет $G_{x,y}$ от $G_{y,x}$. Поэтому можно считать, что $Q_z, Q_t \subset G_{x,y}$. Так как ни один лепеток не является подмножеством объединения остальных, это означает, что индексы z и t расположены в циклическом порядке от x до y. В частности, тогда $y \notin \{x+1, x+2\}$ и по следствию 9.3 множество $Q_{x,y}$ не разделяет $G_{x,y} \supset Q_{z,t}$, что противоречит зависимости множеств $Q_{x,y}$ и $Q_{z,t}$.

2) Если соответствующие хорды пересекаются, то множество $Q_{x,y}$ отделяет друг от Q_z и Q_t (так как один из этих лепестков содержится в $G_{x,y}$, а другой — в $G_{y,x}$). Следовательно, множества $Q_{x,y}$ и $Q_{z,t}$ зависимы.

Пусть множества $Q_{x,y}$ и $Q_{z,t}$ зависимы. Тогда $Q_{x,y}$ отделяет друг от друга лепестки Q_z и Q_t в силу пункта 1, а следовательно, соответствующие множествам хорды пересекаются. □

Теорема 9.5. *Пусть наборы* $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T} \in \mathfrak{R}_k(G)$ *порождают ромашки* F_S *и* F_T*, соответственно, с одинаковым центром и одинаковыми множествами лепестков. Тогда* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}) = \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ *и* $F_S = F_T$ *(то есть, циклические порядки лепестков в этих ромашках одинаковы).*

Доказательство. Пусть $F_S = (P; Q_1, \ldots, Q_m)$, тогда

$$\mathrm{Part}(\mathfrak{S}) = \{G_{1,2}, G_{2,3}, \ldots, G_{m,1}\}, \quad \mathrm{Bound}(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1}.$$

Так как наборы лепестков ромашек F_S и F_T совпадают, то граница любой части из $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ есть множество вида $Q_{x,y}$. Предположим, что одна из частей $\mathrm{Part}(F_T)$ имеет границу $Q_{i,j}$, где индексы i и j — несоседние в циклическом порядке ромашки F_S лепестки.

Рассмотрим две группы лепестков: лежащие в $G_{i,j}$ и лежащие в $G_{j,i}$ (лепестки Q_i и Q_j лежат в обеих группах). Множество $Q_{i,j}$ и любое множество набора $T \in \mathfrak{T}$ независимы, а значит, T по следствию 9.4 содержит либо два лепестка из первой группы (тогда назовем его множеством первого типа), либо два лепестка из второй группы (тогда назовем его множеством второго типа). Так как обе группы содержат отличные от Q_i и Q_j лепестки, то в наборе $\mathfrak{T}$ есть и множества первого типа, и множества второго типа. Но по следствию 9.4 множества разных типов независимы, следовательно, граф $\mathrm{Dep}(\mathfrak{T})$ несвязен, противоречие с леммой 9.5.

Таким образом, циклический порядок в ромашках F_S и F_T совпадает. Отсюда по теореме 9.4 имеем $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}) = \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$, то есть, $F_S = F_T$. □

Из теоремы 9.5 в частности, следует, что все наборы, порождающие ромашку F, разбивают граф одинаково. Этот факт показывает корректность определения разбиения графа ромашкой F.

Определение 9.8. Пусть G — k-связный граф. Назовём часть $A \in \mathrm{Part}(G; S)$ *малой*, если $|A| < k$.

Очевидно, внутренность малой части пуста.

Теорема 9.6. *Для любого набора k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ в k-связном графе G следующие два утверждения равносильны.*

1° *Каждая часть из* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *содержит по крайней мере k вершин.*

2° *Каждая компонента зависимости набора $\mathfrak{S}$, состоящая более чем из одного множества, порождает правильную ромашку.*

Доказательство. $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$. В этом случае для любой компоненты зависимости $\mathfrak{S}' \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ в $\mathrm{Part}(G;\mathfrak{S}')$ нет малых частей. Следовательно, по теореме 9.2 в $\mathrm{Part}(G;\mathfrak{S})$ также нет малых частей.

$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Рассмотрим такой набор $\mathfrak{S}$, что в $\mathrm{Part}(G;\mathfrak{S})$ нет малых частей, и его компоненту зависимости $\mathfrak{S}'$, состоящую более чем из одного множества.

Предположим, что часть $A \in \mathrm{Part}(G;\mathfrak{S}')$ — малая. Тогда A не может содержать ни одной другой компонеты зависимости набора $\mathfrak{S}$ и по теореме 9.2 мы имеем $A \in \mathrm{Part}(G;\mathfrak{S})$, противоречие. Таким образом, в $\mathrm{Part}((G;\mathfrak{S}')$ нет малых частей.

Докажем, что если $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}'$, $|\mathfrak{T}| \geq 2$ и граф $\mathrm{Dep}(\mathfrak{T})$ связен, то набор $\mathfrak{T}$ порождает правильную ромашку. Доказательство будет индукцией по $|\mathfrak{T}|$.

1. *Проверим базу* для набора, состоящего из двух зависимых множеств S и T.

Предположим, что часть $A \in \mathrm{Part}(\{S,T\})$ — малая. Тогда по лемме 3.9 существуют смежные вершины $w \in A \setminus S$ и $w' \in A \setminus T$ и эта пара вершин принадлежит ровно одной части $\mathrm{Part}(\{S,T\})$ — части A. Так как w и w' смежны, существует часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$, содержащая w и w'. По теореме 3.3 существует такая часть $A' \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T}')$, что $w, w' \in B \subset A'$. Так как часть A содержит w и w', то $A' = A'$. Тогда $|B| < k$, но в $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ нет малых частей. Полученное противоречие показывает, что в $\mathrm{Part}(\{S,T\})$ нет малых частей. Теперь из пункта 2 леммы 3.8 следует, что S и T образуют ромашку с четырьмя лепестками и центром $S \cap T$.

2. *Докажем индукционный переход.*

Пусть набор $\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{S}'$ таков, что граф $\mathrm{Dep}(\mathfrak{T}')$ связен, а для любого меньшего набора утверждение уже доказано. Тогда существует такое $S \in \mathfrak{T}'$, что граф зависимости набора $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}' \setminus \{S\}$ связен. По индукционному предположению набор $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}'$ порождает правильную ромашку $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$. Докажем, что набор $\mathfrak{T}'$ также порождает правильную ромашку. Введем обозначения

$$p = |S \cap P|, \quad a_{i,i+1} = |S \cap \mathrm{Int}(G_{i,i+1})|, \quad b_i = |S \cap Q_i|.$$

Тогда

$$\sum_{x=1}^{m} b_i + \sum_{x=1}^{m} a_{i,i+1} + p = k. \tag{9.1}$$

2.1. *Докажем, что множество S не может разделять пустую часть $G_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(F)$.*
Предположим противное. Так как $|G_{i,i+1}| = k$, то S разделяет эту часть на несколько малых частей из $\mathrm{Part}(\mathfrak{T}')$. По теореме 9.4 мы знаем, что множества $Q_{i,i+2}, Q_{i-1,i+1} \in \mathfrak{R}_k(G)$ зависимы и $G_{i,i+1}$ является объединением нескольких (возможно, одной) частей $\mathrm{Part}(\{Q_{i,i+2}, Q_{i-1,i+1}\})$. Все эти части имеют пустую внутренность, поэтому по лемме 3.9 существуют смежные вершины $u \in Q_i$, $v \in Q_{i+1}$ (см. рисунок 9.6a).

Так как u и v смежны, то существует часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$, содержащая u и v. По теореме 3.3 существует такая часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T}')$, что $u, v \in B \subset A$. По теореме 3.3 часть A должна содержаться в какой-то части $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$. Так как часть A содержит u и v, то можно сделать вывод $A \subset G_{i,i+1}$, следовательно, $|A| < k$. Тогда и $|B| < k$, но в $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ нет малых частей. Полученное противоречие показывает, что S не может разделять ни одну из пустых частей из $\mathrm{Part}(F)$.

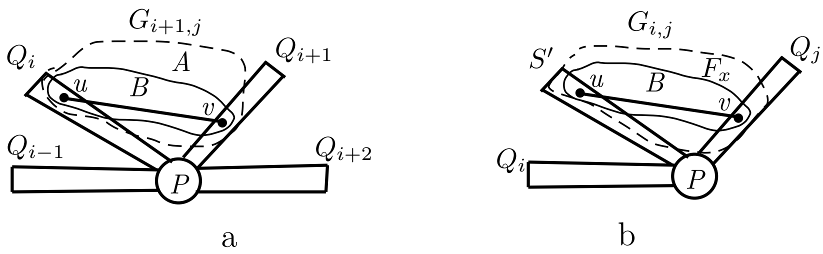


Рис. 9.6: Разбиение частей $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ множеством S.

2.2. *Пусть множества S и $Q_{i,j} \in \mathfrak{R}_k(G)$ зависимы.*
Не умаляя общности будем считать, что

$$|S \cap \mathrm{Int}(G_{i,j})| \le |S \cap \mathrm{Int}(G_{j,i})|. \tag{9.2}$$

Введем обозначения:

$$Q_{i,j} \cap S = P', \quad Q_{i,j} \cap \mathrm{Int}(H_x) = T_x, \quad \mathrm{Int}(G_{i,j}) \cap S = S',$$

$$F_x = G_{i,j} \cap H_x, \quad R_x = T_x \cup P' \cup S'.$$

Пусть для некоторого x мы имеем $|R_x| < k$. Поскольку $G_{i,j}$ есть объединение нескольких частей из $\mathrm{Part}(Q_{i,j})$, то F_x в силу леммы 3.7 является объединением нескольких частей из $\mathrm{Part}(\{Q_{i,j}, S\})$, причем объединение границ этих частей — это R_x. Следовательно, все эти части пусты и $F_x = R_x$. Выберем две смежные вершины $u \in S'$ и $v \in T_x$ (см. рисунок 9.6b). Такие две вершины по лемме 3.9 есть в любой из пустых частей $\mathrm{Part}(\{Q_{i,j}, S\})$, составляющих в объединении F_x. Пусть эта часть — F'. Тогда по лемме 3.9 мы знаем, что F' — единственная часть $\mathrm{Part}(\{Q_{i,j}, S\})$, содержащая обе вершины u и v.

Так как u и v смежны, то существует часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$, содержащая u и v. Поскольку каждое из множеств $F_1, \ldots, F_\ell, G_{j,i}$ является объединением частей $\mathrm{Part}(\{Q_{i,j}, S\})$, ровно одно из них содержит $\{u, v\}$: это F_x. Кроме того, все перечисленные множества являются объединениями частей $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$, следовательно, по теореме 3.3 хотя бы одно из них должно содержать $B \supset \{u, v\}$. Это означает, что $B \subset F_x$, а значит, $|B| \le |F_x| < k$, что невозможно.

Следовательно, для всех x мы имеем $|R_x| \ge k$. Тогда

$$2k \le |R_1| + |R_2| = (2|S'| + |P'|) + (|T_1| + |T_2| + |P'|) \le k + k \qquad (9.3)$$

(последнее неравенство следует из (9.2). В обоих неравенствах в (9.3) должно достигаться равенство, что возможно лишь в случае, когда $\mathrm{Part}(S) = \{H_1, H_2\}$ и

$$|Q_{i,j} \cap \mathrm{Int}(H_1)| = |Q_{i,j} \cap \mathrm{Int}(H_2)|, \quad |S \cap \mathrm{Int}(G_{i,j})| = |S \cap \mathrm{Int}(G_{j,i})|. \quad (9.4)$$

2.3. Предположим, что множество S не пересекает внутренность ни одной из частей из $\mathrm{Part}(F)$. Учитывая пункт 2.1, получаем, что в этом случае S не разделяет ни одну из частей $\mathrm{Part}(F)$. Такое множество может быть разделяющим только в случае, когда оно является объединением двух лепестков и центра ромашки F. В этом случае понятно, что набор $\mathfrak{T}'$ также порождает ромашку F.

Теперь не умаляя общности можно предположить, что $a_{i,i+1} \ne 0$. В силу зависимости S и $Q_{i,i+1}$ имеет место один из двух случаев.

1° Существует такое $j \ne i$, что $a_{j,j+1} > 0$.

2° Для всех $x \ne i$ мы имеем $a_{x,x+1} = 0$, и существует такое $t \notin \{i-1, i, i+1\}$, что $b_t \ne 0$.

2.3.1. *Рассмотрим случай* 1°. Из (9.4) имеем

$$2a_{i,i+1} + b_i + b_{i+1} + p = k = 2a_{j,j+1} + b_j + b_{j+1} + p.$$

Учитывая (9.1), получаем, что $a_{x,x+1} = 0$ при $x \notin \{i, j\}$ и $b_x = 0$ при $x \notin \{i, i+1, j, j+1\}$. Более того, если $b_i \ne 0$ или $b_{j+1} \ne 0$, то $i = j+1$, а если $b_j \ne 0$ или $b_{i+1} \ne 0$, то $j = i+1$. Так как в ромашке хотя бы четыре лепестка, то не умаляя общности мы можем считать, что $i \ne j+1$ и $b_i = b_{j+1} = 0$.

Тогда нетрудно понять, что S не разбивает часть $G_{j+1,i} \supset Q_i \cup (P \setminus S)$ (см. рисунок 9.7a). Очевидно, множества S и $Q_{i,j}$ зависимы и по (9.4) множество S должно делить $Q_{i,j}$ на две равные части. Учитывая, что S не разделяет $Q_i \cup (P \setminus S)$, получаем, что $S \supset P$, $b_j = 0$ и S не разбивает лепесток Q_j. Аналогично, $b_{i+1} = 0$.

Таким образом, множество S не пересекает лепестков ромашки F и является объединением центра P и двух равных лепестков $Q'_i = S \cap \mathrm{Int}(G_{i,i+1})$ и $Q'_j = S \cap \mathrm{Int}(G_{j,j+1})$. Множество S не разбивает отличных от $G_{i,i+1}$ и $G_{j,j+1}$ частей из $\mathrm{Part}(F)$, делит часть $G_{i,i+1}$ на две части с границами $Q_i \cup Q'_i \cup P$ и $Q_{i+1} \cup Q'_i \cup P$, а часть $G_{j,j+1}$ — на две части с границами $Q_j \cup Q'_j \cup P$ и $Q_{j+1} \cup Q'_j \cup P$. Следовательно, набор $\mathfrak{T}'$ порождает ромашку F', полученную из F добавлением лепестка Q'_i между Q_i и Q_{i+1} и лепестка Q'_j между Q_j и Q_{j+1}.

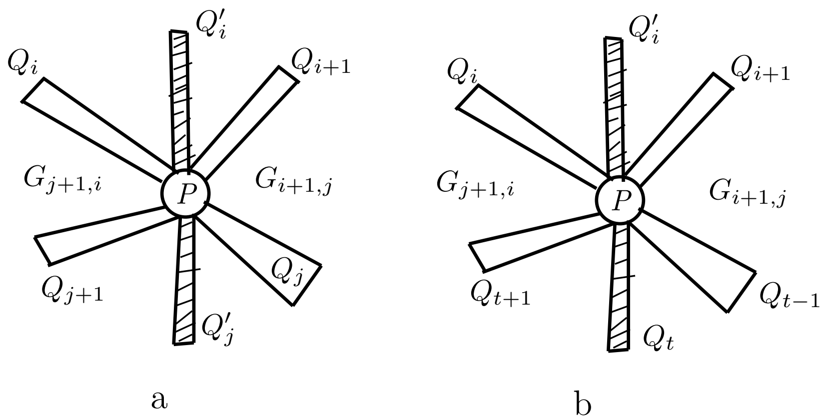


Рис. 9.7: Разбиение множества S на лепестки.

2.3.2. *Рассмотрим случай* 2°. Из (9.4) имеем

$$2a_{i,i+1} + b_i + b_{i+1} + p = k = 2b_t + b_{t-1} + b_{t+1} + p.$$

Понятно, что $a_{x,x+1} = 0$ при $x \neq i$. Учитывая (9.1), получаем, что $b_x = 0$ при $x \notin \{i, i+1, t-1, t, t+1\}$. Более того, если $b_i \neq 0$ или $b_{t+1} \neq 0$, то $i = t+1$, а если $b_t \neq 0$ или $b_{i+1} \neq 0$, то $t = i+1$. Так как в ромашке хотя бы четыре лепестка, то не умаляя общности мы можем считать, что $i \neq t+1$ и $b_i = b_{t+1} = 0$.

Тогда нетрудно понять, что S не разбивает часть $G_{t+1,i} \supset Q_i \cup (P \setminus S)$ (см. рисунок 9.7b). Очевидно, множества S и $Q_{i,t-1}$ зависимы и по (9.4) множество S должно делить $Q_{i,j}$ на две равные части. Учитывая, что S не разделяет $Q_i \cup (P \setminus S)$, получаем, что $S \supset P$, $b_{t-1} = 0$ и S не разбивает лепесток Q_{t-1}. Аналогично, $b_{i+1} = 0$.

Таким образом, множество S и является объединением центра P, лепестка Q_t и имеющего такой же размер нового лепестка $Q'_i = S \cap \mathrm{Int}(G_{i,i+1})$. Множество S не пересекает других лепестков ромашки F, не разбивает отличных от $G_{i,i+1}$ частей из $\mathrm{Part}(F)$, делит часть $G_{i,i+1}$ на две части с границами $Q_i \cup Q'_i \cup P$ и $Q_{i+1} \cup Q'_i \cup P$. Следовательно, набор $\mathfrak{T}'$ порождает ромашку F', полученную из F добавлением лепестка Q'_i между Q_i и Q_{i+1}. $\square$

Глава 10

Структура трёхсвязного графа

Классическое дерево блоков и точек сочленения, описывающее структуру разбиения связного графа точками сочленения, определено во введении. Структура разбиения двусвязного графа 2-вершинными разделяющими множествами уже не так проста, но тоже может быть описана с помощью дерева, что сделано в главе 5. В этой главе мы изучим гораздо более сложную структуру взаимного расположения 3-вершинных разделяющих множеств в трёхсвязном графе. Для этого множества будут разбиты на *комплексы*, взаимное расположение которых будет описано с помощью гипердерева разбиения, определенного в разделе 4.4. В основном, результаты этой главы получены автором и А. В. Пастором совместно в 2008-2011 годах.

Начнем с выяснения свойств определенных ранее в общем случае понятий — разделяющих множеств, частей разбиения, ромашек и разрезов — в случае трёхсвязного графа. Во всей главе рассматривается трёхсвязный граф G, имеющий не менее чем 7 вершин. Основными объектами изучения будут 3-вершинные разделяющие множества из $\mathfrak{R}_3(G)$.

10.1 Ромашки и разрезы

10.1.1 Зависимые разделяющие множества в трёхсвязном графе

Пусть $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$. Разбиение графа парой зависимых разделяющих множеств описывается леммой 3.7. Мы процитируем лемму 3.7 для трёхсвязного графа G и приведем три ее очевидных следствия. Пусть $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$ зависимы, $\mathrm{Part}(S) = \{F_1, \dots, F_n\}$, а $\mathrm{Part}(T) = \{H_1, \dots, H_m\}$. Для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ и $j \in \{1, \dots, m\}$ введем обозначения

$$P = S \cap T, \quad S_j = S \cap \mathrm{Int}(H_j), \quad T_i = T \cap \mathrm{Int}(F_i), \quad G_{i,j} = F_i \cap H_j.$$

Лемма 3.7 говорит нам, что

$$\mathrm{Part}(\{S, T\}) = \{G_{i,j}\}_{i \in \{1,\dots,n\},\, j \in \{1,\dots,m\}}, \qquad \mathrm{Bound}(G_{i,j}) = P \cup T_i \cup S_j,$$

причем $T_i \neq \varnothing$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ и $S_j \neq \varnothing$ для всех $j \in \{1, \dots, m\}$.

Следствие 10.1. *Пусть множества $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$ зависимы. Тогда $|S \cap T| \leq 1$, $|\mathrm{Part}(S)| \leq 3$ и $|\mathrm{Part}(T)| \leq 3$.*

Доказательство. По лемме 3.7 для любой части $A \in \mathrm{Part}(S)$ мы имеем $\mathrm{Int}(A) \cap T \neq \varnothing$. В силу $|T| = 3$ имеем $|\mathrm{Part}(S)| \leq 3$. Так как в $\mathrm{Part}(S)$ хотя бы две части, $|T \setminus S| \geq 2$, откуда $|S \cap T| \leq 1$. $\square$

Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_3(G)$. Напомним, что *малая* часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ содержит менее 3 вершин.

Определение 10.1. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_3(G)$, $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Мы будем называть часть A *пустой*, если $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$ и *непустой* в противном случае.

Замечание 10.1. Если часть A — малая, то понятно, что $|A| = 2$ и $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$. Таким образом, малая часть всегда пуста.

Следствие 10.2. *Пусть $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$ зависимы, $S \cap T = \varnothing$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1) *В $\mathrm{Part}(\{S, T\})$ есть хотя бы одна малая часть.*

2) *Пусть $F \in \mathrm{Part}(S)$ и $H \in \mathrm{Part}(T)$. Тогда часть $F \cap H \in \mathrm{Part}(\{S, T\})$ — малая, если и только если $|F \cap T| = 1$ и $|H \cap S| = 1$.*

3) *Любая малая часть $G_{i,j} \in \mathrm{Part}(\{S, T\})$, состоит из двух смежных вершин $u \in T$ и $v \in S$. Более того, v — единственная вершина части H_j, смежная с u, а u — единственная вершина части F_i, смежная с v.*

Доказательство. 1) Поскольку $|T_1| + |T_2| \leq 3$, как минимум одно из множеств T_1 или T_2 состоит ровно из одной вершины. Не умаляя общности можно считать, что это T_1. Аналогично мы можем считать, что $|S_1| = 1$. Тогда $|\mathrm{Bound}(G_{1,1})| = |T_1 \cup S_1| = 2$. Следовательно, $\mathrm{Int}(G_{1,1}) = \varnothing$ и $|G_{1,1}| = 2$.

2) Аналогично пункту 1, малой является любая часть $G_{i,j}$, для которой $|T_i| = |S_j| = 1$. Это условие является необходимым для того, чтобы часть $G_{i,j}$ была малой, так как $|T_i| \geq 1$ и $|S_j| \geq 1$.

3) Пусть $|G_{i,j}| = 2$. Очевидно, тогда $|T_i| = |S_j| = 1$ и $G_{i,j} = \{u, v\}$, где $T_i = \{u\}$, $S_j = \{v\}$. Поскольку $u \in T$, вершина u должна быть смежна

с $\mathrm{Int}(H_j)$. С другой стороны, так как $u \in \mathrm{Int}(F_i)$, вершина u может быть смежна только с вершинами части F_i. Кроме того, $F_i \cap H_j = G_{i,j} = \{u, v\}$, следовательно, единственной вершиной части H_j, которая может быть смежна с u, является v. Таким образом, вершины u и v смежны и v — единственная вершина части H_j, смежная с u. Аналогично, u — единственная вершина части F_i, смежная с v. $\square$

Следствие 10.3. *Пусть $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$ зависимы, а $S \cap T = \{p\}$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1) $|\mathrm{Part}(S)| = |\mathrm{Part}(T)| = 2$ *и в* $\mathrm{Part}(\{S, T\})$ *нет малых частей.*

2) *Пусть $G_{i,j} \in \mathrm{Part}(\{S, T\})$, $\mathrm{Int}(G_{i,j}) = \varnothing$. Тогда $G_{i,j} = \{u, v, p\}$, где $u \in S \setminus T$ и $v \in T \setminus S$, причем вершины u и v смежны.*

Доказательство. 1) Поскольку все множества T_1, T_2, S_1, S_2, P непусты, мы получаем, что $m = n = 2$ и $|T_1| = |T_2| = |S_1| = |S_2| = |P| = 1$. Любая часть $G_{i,j}$ должна содержать вершины множеств T_i, S_j и P, то есть, как минимум 3 вершины. Таким образом, малых частей нет.

2) Тогда $G_{i,j} = \mathrm{Bound}(G_{i,j}) = T_i \cup S_j \cup P$, откуда $|G_{i,j}| = 3$. Пусть $T_i = \{v\}$, $S_j = \{u\}$. Тогда $G_{i,j} = \{u, v, p\}$. То, что вершины u и v смежны доказывается так же, как в пункте 2 следствия 10.2. $\square$

Далее мы исключим из рассмотрения случай $|\mathrm{Part}(\{S\})| = |\mathrm{Part}(\{T\})| = 3$, поскольку в этом случае $P = \varnothing$ и $|T_1| = |T_2| = |T_3| = |S_1| = |S_2| = |S_3| = 1$. Тогда все части $\mathrm{Part}(\{S, T\})$, очевидно, являются малыми, а значит, $v(G) = |S \cup T| = 6$. Такие графы мы рассматривать не будем. (Нетрудно заметить, что в этом случае граф $G \simeq K_{3,3}$.)

Далее для любой пары зависимых множеств графа G каждое из них делит граф не более чем на три части и хотя бы одно делит граф ровно на две части.

10.1.2 Разрезы в трёхсвязном графе

Обозначим через $\mathfrak{T}_i(G)$ (где $i \in \{0, 1, 2, 3\}$) семейство, состоящее из всех разделяющих множеств, содержащих i ребер и $3 - i$ вершин графа G. Тогда $\mathfrak{T}_0(G) = \mathfrak{R}_3(G)$, а $\cup_{i=1}^{3} \mathfrak{T}_i(G) = \mathfrak{T}(G)$ — множество всех разрезов графа G (см. раздел 3.4). Пусть $\mathfrak{T}^+(G) = \mathfrak{T}(G) \cup \mathfrak{T}_0(G)$.

Определение 10.2. 1) Для каждого разреза $M \in \mathfrak{T}(G)$ мы синхронизируем обозначения частей разбиения и рёбер. А именно, будем применять обозначения $\mathrm{Part}(G; M) = \{G_1^M, G_2^M\}$, $\mathrm{Int}(G_M^i) = H_i$ так, что для каждого ребра $x_1x_2 \in M$ выполнено $x_1 \in H_1$ и $x_2 \in H_2$.

Границы разреза M будем обозначать через $T_M^i = \mathrm{R}(G_M^i)$ (где $i \in \{1, 2\}$).

2) *Окрестностью* части G^i_M назовём множество $\mathrm{O}(G^i_M) = G^i_M \cup W(M)$.

Дополнение разреза ребром

Определение 10.3. Пусть $M, N \in \mathfrak{T}^+(G)$. Если множество N содержит все вершины множества M и для каждого ребра $e \in M$ содержит либо e, либо один из его концов, то будем говорить, что M *содержит* N (или N *содержится* в M).

Если разрез $M \in \mathfrak{T}(G)$ не содержится ни в одном другом разрезе из $\mathfrak{T}(G)$, назовем его *максимальным.*

Будем говорить, что множество $M \in \mathfrak{T}^+(G)$ можно *дополнить* ребром ab, если при замене вершины $a \in M$ на ребро ab получается разрез из $\mathfrak{T}(G)$.

Замечание 10.2. 1) Разрез является максимальным, если и только если его нельзя дополнить ребром.

2) Если два ребра разреза $M \in \mathfrak{T}(G)$ имеют общий конец x, то x является единственной вершиной одной из компонент связности графа $G - M$. Действительно, в противном случае, заменив в разрезе M эти два ребра вершиной x, мы получим разделяющее множество из двух элементов, что противоречит трехсвязности G.

Лемма 10.1. *Пусть $x \in M \in \mathfrak{T}^+(G)$, $xy \in E(G)$ и H — компонента связности графа $G - M$, содержащая y. Тогда множество M можно дополнить ребром xy, если и только если y — единственная вершина из H, смежная с x.*

Доказательство. Пусть M' — множество, получаемое из M заменой вершины x на ребро xy. Тогда если граф $G - M'$ несвязен, то он имеет ровно две компоненты связности, одна из которых содержит вершину x, а другая — y. Заметим, что все вершины из H лежат в одной компоненте связности графа $G - M'$ — той, что содержит y. То есть, если вершина x смежна в графе $G - M'$ хотя бы с одной вершиной подграфа H, то вершины x и y лежат в одной компоненте связности и, следовательно, граф $G - M'$ связен. С другой стороны, если вершина x не смежна ни с одной вершиной подграфа H, кроме y, то в графе $G - M'$, очевидно, нет пути между вершинами x и y и, следовательно, он несвязен. □

Следствие 10.4. *Если $M \in \mathfrak{T}_2(G)$, то существует не более одного ребра, которым можно дополнить разрез M.*

Доказательство. Пусть x — единственная вершина разреза M, а H_1 и H_2 — компоненты связности графа $G - M$. Тогда по лемме 10.1 в каждую из них ведет не более одного ребра, которым можно дополнить M.

Кроме того очевидно, что $V(G) = H_1 \cup H_2 \cup \{x\}$. Поскольку граф G трехсвязен, $d_G(x) \geq 3$. Следовательно, вершина x не может быть смежна ровно с одной вершиной из H_1 и ровно с одной вершиной из H_2. Поэтому, разрез M можно дополнить не более, чем одним ребром. $\square$

Следствие 10.5. *Пусть множества $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$ зависимы и $\{x, y\} \in \mathrm{Part}(\{S, T\})$. Тогда каждое из множеств S и T можно дополнить ребром xy.*

Доказательство. По следствию 10.3 мы имеем $S \cap T = \varnothing$. Не умаляя общности можно считать, что $x \in S$, $y \in T$. Пусть $x \in F \in \mathrm{Part}(T)$, $y \in H \in \mathrm{Part}(S)$. По следствию 10.2 вершины x и y смежны, причем y — единственная вершина части H, смежная с x. Тогда по лемме 10.1 множество S можно дополнить ребром xy. Аналогично, множество T также можно дополнить ребром xy. $\square$

Вырожденные и тривиальные разрезы

Определение 10.4. Назовем разрез $M \in \mathfrak{T}(G)$ *невырожденным*, если $G_1^M \neq T_1^M$ и $G_M^2 \neq T_2^M$ и *вырожденным* в противном случае.

Назовем разделяющее множество $M \in \mathfrak{T}^+(G)$ *тривиальным*, если одна из компонент связности графа $G - M$ состоит из единственной вершины и *нетривиальным* в противном случае.

Замечание 10.3. Очевидно, тривиальные множества из $\mathfrak{R}_3(G)$ — это в точности окрестности всех вершин степени 3.

Случай, когда одновременно $G_1^M = T_1^M$ и $G_2^M = T_2^M$, нам неинтересен, поскольку в этом случае граф G содержит не более 6 вершин. Так что мы будем считать, что для любого вырожденного разреза выполнено ровно одно из этих двух равенств.

Замечание 10.4. 1) Вырожденный разрез, содержащий ровно одно ребро, является тривиальным. Действительно, если разрез $M = \{u, v, x_1x_2\}$ вырожден ($G_1^M = T_1^M$), то из трехсвязности графа G понятно, что $\mathrm{N}_G(x_1) = \{x_2, u, v\} = T_2^M$. При этом, множества $\{x_1u, x_1v, x_1x_2\}$ и $\{u, x_1v, x_1x_2\}$ также являются тривиальными разрезами.

2) Если два ребра разреза имеют общие концы, то этот разрез тривиален.

3) Структура вырожденного нетривиального разреза также может быть легко описана. Как следует из сказанного выше, такой разрез должен содержать хотя бы два ребра. Если разрез $M = \{u, x_1x_2, y_1y_2\}$ вырожден ($G_1^M = T_1^M$) и нетривиален, то $\mathrm{N}_G(x_1) = \{y_1, x_2, u\}$ и $\mathrm{N}_G(y_1) = \{x_1, y_2, u\}$.

Если же разрез $M = \{x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2\}$ является вырожденным и нетривиальным (опять же $G_1^M = T_1^M$), то вершины x_1, y_1, z_1 попарно смежны и кроме этого смежны еще только с соответствующими им вершинами множества T_2^M.

Множества, содержащиеся в разрезе

Лемма 10.2. *Пусть $M \in \mathfrak{T}(G)$ — нетривиальный разрез. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Пусть R — трехвершинное множество, содержащее все вершины из M и ровно по одному концу всех ребер из M, но не совпадающее с T_1^M и T_2^M. Тогда $R \in \mathfrak{R}_3(G)$. Более того, R делит граф ровно на две части, одна из которых содержит G_1^M, а другая — G_2^M.*

2) *Если $G_2^M \neq T_2^M$, то множество T_2^M является разделяющим, причем $\mathrm{O}(G_1^M) \in \mathrm{Part}(T_2^M)$, а G_2^M — объединение остальных частей $\mathrm{Part}(T_2^M)$. Если разрез M невырожден, то оба множества T_1^M и T_2^M являются разделяющими.*

Доказательство. 1) Поскольку R не совпадает с T_1^M и T_2^M, множества $G_1^M \setminus R$ и $G_2^M \setminus R$ непусты. Очевидно, что множество R разделяет эти два множества и, следовательно, является разделяющим. Отметим, что $(G_1^M \setminus R) \cup (G_2^M \setminus R) = V(G) \setminus R$. Поэтому, нам достаточно доказать, что $G_1^M \setminus R$ и $G_2^M \setminus R$ — компоненты связности графа $G - R$.

Пусть $x_1 \in T_1^M \setminus R$. Тогда разрез M содержит ребро x_1x_2 и $x_2 \in R$. Поскольку разрез M нетривиален, то x_1 — единственная вершина не из части G_2^M, смежная с x_2. Множество $G_1^M \setminus R$ — объединение нескольких компонент связности графа $G - R$ и в каждой из них должна быть вершина, смежная с x_2. Так как ровно одна вершина из $G_1^M \setminus R$ (а именно, x_1) смежна с x_2, $G_1^M \setminus R$ — компонента связности графа $G - R$. Анологично для $G_2^M \setminus R$.

2) Нетрудно понять, что множество T_2^M отделяет G_2^M от $\mathrm{O}(G_1^M)$ и, следовательно, является разделяющим. То, что все вершины множества $G_1^M \setminus T_2^M$ лежат в одной компоненте связности графа $G - R$, доказывается так же, как и в предыдущем пункте. Тогда очевидно, что часть $\mathrm{Part}(G; T_2^M)$, содержащая эти вершины, совпадает с $\mathrm{O}(G_1^M)$. $\square$

Замечание 10.5. Очевидно, что все разделяющие множества из леммы 10.2 содержатся в разрезе M. Более того, все эти множества, кроме T_1^M и T_2^M, попарно зависимы, а множества T_1^M и T_2^M независимы друг с другом и с другими содержащимися в M множествами.

Определение 10.5. Множества, описанные в пункте 1 леммы 10.2, мы будем называть *внутренними множествами* разреза M. Набор, состоящий из всех внутренних множеств разреза M, будем обозначать через $\mathfrak{R}(M)$.

Следствие 10.6. *Пусть $M \in \mathfrak{T}(G)$, множество $S \in \mathfrak{R}_3(G)$ зависимо с T_2^M, $S \cap G_2^M = \{x\}$ и множество S отделяет вершину $y \in T_2^M$ от остальных вершин множества T_2^M. Тогда разрез M можно дополнить ребром xy.*

Доказательство. Пусть $x \in H \in \mathrm{Part}(T_2^M)$ (нетрудно проверить, что $H = G_2^M$) и $y \in F \in \mathrm{Part}(S)$. По условию, $S \cap H = \{x\}$ и $T_2^M \cap F = \{y\}$. Тогда, по следствию 10.2, $\{x, y\} \in \mathrm{Part}(\{S, T_2^M\})$, вершины x и y смежны и x — единственная вершина части G_2^M, смежная с y. Следовательно, по лемме 10.1 разрез M можно дополнить ребром xy. □

Лемма 10.3. *Пусть разрезы $M_1, M_2 \in \mathfrak{T}_2(G)$ имеют два общих ребра. Тогда существует разрез $M \in \mathfrak{T}_3(G)$, содержащий M_1 и M_2.*

Доказательство. Пусть $M_1 = \{x_1x_2, y_1y_2, z_1\}$, а z_2 — единственная вершина разреза M_2. Не умаляя общности можно считать, что $z_2 \in G_2^{M_1}$. Тогда M_2 не разделяет вершины части $G_1^{M_1}$. В частности, M_2 не разделяет вершины x_1, y_1 и z_1. То есть мы можем считать, что $M_2 = \{x_1x_2, y_1y_2, z_2\}$ и говорить, что $z_1 \in G_1^{M_2}$ (см. рисунок 10.1).

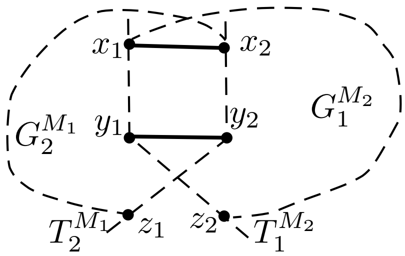


Рис. 10.1: Разрезы M_1 и M_2 с двумя общими рёбрами.

Заметим, что тогда множество $T_2^{M_1} = \{x_2, y_2, z_1\}$ отделяет вершину z_2 от вершин x_1, y_1, а множество $T_1^{M_2} = \{x_1, y_1, z_2\}$ отделяет вершину z_1 от вершин x_2, y_2. Следовательно, разделяющие множества $T_2^{M_1}$ и $T_1^{M_2}$ зависимы и по следствию 10.6 разрез M_1 можно дополнить ребром z_1z_2 и получить искомый разрез $M = \{x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2\}$. □

Лемма 10.4. *Для нетривиального разреза $M \in \mathfrak{T}(G)$ выполнены следующие утверждения.*

1) *Если* $M \ni x_1x_2$, *то не существует множества* $S \in \mathfrak{R}_3(G)$, *содержащего* x_1 *и* x_2.

2) *Если* $S \in \mathfrak{R}_3(G)$ *таково, что* $S \subset W(M)$, *то* S *содержится в разрезе* M *(то есть,* S *— внутреннее множество разреза* M *или его граница).*

Доказательство. 1) Предположим противное, пусть $x_1, x_2 \in S \in \mathfrak{R}_3(G)$. Не умаляя общности предположим, что $S = \{x_1, x_2, t\}$, где $t \in G_1^M$. Так как $\mathrm{Int}(G_2^M)$ есть объединение внутренностей нескольких частей $\mathrm{Part}(T_2^M)$ и $S \cap \mathrm{Int}(T_2^M) = \varnothing$, то по лемме 3.8 вершины из $G_2^M \setminus S$ связаны в графе $G - S$. Более того, с ними также связаны вершины множества $T_1^M \setminus S$, поскольку каждая вершина этого множества либо принадлежат множеству $T_2^M \setminus S$, либо смежна с одной из его вершин.

Рассмотрим произвольную вершину $w \in \mathrm{Int}(G_1^M) \setminus S$ (если такая есть). Так как $\mathrm{Int}(G_1^M)$ есть объединение внутренностей нескольких частей $\mathrm{Part}(T_1^M)$, то по теореме Менгера существуют три проходящих по G_1^M непересекающихся по внутренним вершинам пути от w до трех вершин множества T_1^M. Поскольку $|S \cap G_1^M| = 2$, то хотя бы один из таких путей не пересекается с S, следовательно, в графе $G - S$ вершина w связана с $G_2^M \setminus S$. Таким образом, граф $G - S$ связен, противоречие.

2) По пункту 1 множество S содержит все вершины разреза M и ровно по одной вершине каждого ребра M, то есть, S содержится в M. $\square$

Следствие 10.7. *Два максимальных разреза могут иметь не более одного общего ребра.*

Доказательство. Пусть максимальные разрезы $M_1, M_2 \in \mathfrak{T}(G)$ имеют два общих ребра. Если $M_i \in \mathfrak{T}_2(G)$, то положим $M_i' = M_i$. Если $M_i \in \mathfrak{T}_3(G)$, то M_i' получается из M_i заменой того ребра, которого нет в M_{3-i}, на один из его концов. Очевидно, что эти замены можно провести так, что разрезы M_1' и M_2' будут различны.

По лемме 10.3 разрезы M_1' и M_2' можно дополнить до разреза $M \in \mathfrak{T}_3(G)$. Однако, по следствию 10.4 каждый из разрезов M_1' и M_2' может содержаться только в одном разрезе из $\mathfrak{T}_3(G)$. Таким образом, разрезы M_1 и M_2 содержатся или совпадают с разрезом M и как минимум один из них не является максимальным. $\square$

Зависимые разрезы и особые ребра

Определение 10.6. Назовем ребро $e \in E(G)$ *особым*, если существуют различные вершины $u, v, t, w \in V(G)$ такие, что $\{u, v, e\}, \{t, w, e\} \in \mathfrak{T}(G)$.

Замечание 10.6. Пусть $\{a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2\} \in \mathfrak{T}_3(G)$. Нетрудно понять, что ребра a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 — особые.

Лемма 10.5. *Пусть разрезы $M, N \in \mathfrak{T}_1(G)$ зависимы и содержат ребро x_1x_2. Тогда существует разрез $\{x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2\} \in \mathfrak{T}_3(G)$ такой, что $M = \{x_1x_2, y_1, z_2\}$, $N = \{x_1x_2, y_2, z_1\}$.*

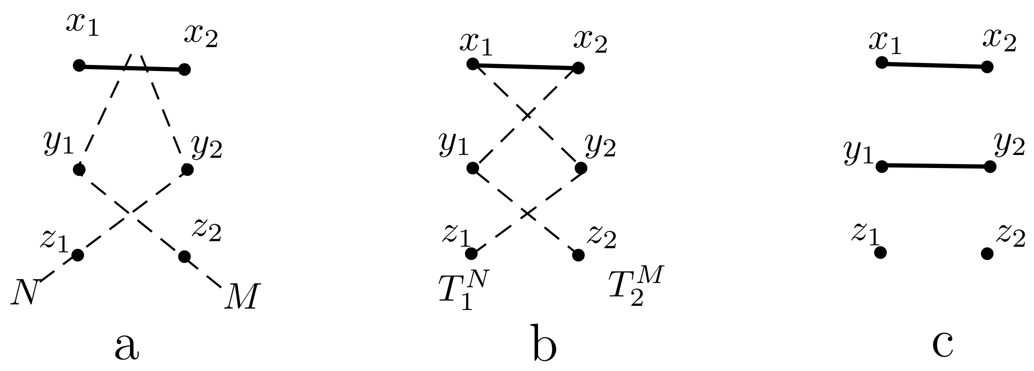


Рис. 10.2: Зависимые разрезы M и N.

Доказательство. Пусть $M \cap G_1^N = \{y_1\}$, $M \cap G_2^N = \{z_2\}$, $N \cap G_1^M = \{z_1\}$, $N \cap G_2^M = \{y_2\}$. Все эти пересечения непусты, так как разрезы M и N зависимы. Рассмотрим множества $T_2^M = \{x_2, y_1, z_2\}$ и $T_1^N = \{x_1, y_2, z_1\}$ (см. рисунок 10.2a). Заметим, что T_2^M отделяет вершину y_2 от вершин x_1, z_1, а T_1^N отделяет вершину y_1 от вершин x_2, z_2 (см. рисунок 10.2b). Следовательно, T_2^M и T_1^N зависимы. Тогда, по следствию 10.6 оба разреза M и N можно дополнить ребром y_1y_2 (см. рисунок 10.2c). Получившиеся разрезы $\{x_1x_2, y_1y_2, z_1\}$ и $\{x_1x_2, y_1y_2, z_2\}$ по лемме 10.3 содержатся в разрезе $\{x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2\}$. □

Теорема 10.1. *Для вершин x_1, x_2 трёхсвязного графа G следующие два условия эквивалентны.*

1° *Вершины x_1 и x_2 смежны, x_1x_2 — особое ребро.*

2° *Существуют зависимые множества $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$ такие, что $x_1 \in S$, $x_2 \in T$ и $\{x_1, x_2\} \in \mathrm{Part}(\{S, T\})$.*

Доказательство. 2° $\Rightarrow$ 1°. По следствию 10.5 разделяющие множества S и T можно дополнить ребром x_1x_2. Следовательно, ребро x_1x_2 является особым.

1° $\Rightarrow$ 2°. Тогда существуют различные вершины $u, v, t, w \in V(G)$ такие, что $M = \{u, v, x_1x_2\}, N = \{t, w, x_1x_2\} \in \mathfrak{T}(G)$. Рассмотрим два случая.

1. *Разрезы M и N независимы.*
Не умаляя общности можно считать, что $G_1^M \supset G_1^N$ и $G_2^M \subset G_2^N$. Рассмотрим непересекающиеся множества T_1^M и T_2^N. В нашем случае $t, w \in \mathrm{Int}(G_1^M)$, $x_2 \notin G_1^M$. Тогда по лемме 10.2 множество T_1^M является разделяющим и отделяет x_2 от t, w. Аналогично, множество T_2^N является разделяющим и отделяет x_1 от u, v (см. рисунок 10.3a). Следовательно, множества $T_1^M = \{x_1, u, v\}$ и $T_2^N = \{x_2, t, w\}$ зависимы и, по следствию 10.2, $\{x_1, x_2\} \in \mathrm{Part}(\{T_1^M, T_2^N\})$.

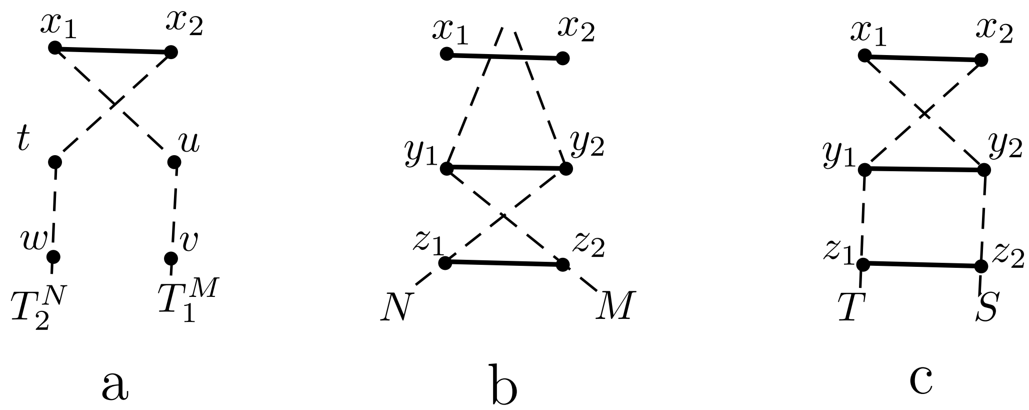


Рис. 10.3: Особое ребро x_1x_2.

2. *Разрезы M и N зависимы.*
Тогда по лемме 10.5 существует такой разрез $\{x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2\} \in \mathfrak{T}_3(G)$, что $M = \{x_1x_2, y_1, z_2\}$ и $N = \{x_1x_2, y_2, z_1\}$ (см. рисунок 10.3b). Рассмотрим множества $S = \{x_1, y_2, z_2\}$ и $T = \{x_2, y_1, z_1\}$. По лемме 10.2 $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$, причем S отделяет вершину x_2 от вершин y_1, z_1, и T отделяет вершину x_1 от вершин y_2, z_2 (см. рисунок 10.3c). Таким образом, множества S и T зависимы и, по следствию 10.2, $\{x_1, x_2\} \in \mathrm{Part}(\{S, T\})$. $\square$

10.1.3 Тройные разрезы

В этом разделе мы изучим тривиальные вершинные разделяющие множества. Очевидно, это в точности множества вида $\mathrm{N}_G(a)$, где $a \in V(G)$ и $d_G(a) = 3$.

Определение 10.7. Пусть $T = \mathrm{N}_G(a) \in \mathfrak{R}_3(G)$ — тривиальное множество, а множество $S \in \mathfrak{R}_3(G)$, содержащее вершину a, таково, что $|\mathrm{Part}(S)| = 3$ и внутренность каждой части $\mathrm{Part}(S)$ содержит по вершине множества T. Тогда будем говорить, что тривиальное множество T *подчинено* множеству S. Обозначим через $\mathfrak{D}$ набор, состоящий из всех

3-разделяющих множеств, для которых существует подчиненное тривиальное множество.

Замечание 10.7. Из определения нетрудно понять, что если $S \in \mathfrak{D}$, то существует вершина $a \in S$ степени 3.

Лемма 10.6. 1) *Если множество $S \in \mathfrak{R}_3(G)$ делит граф более, чем на три части, то $S \in \mathfrak{D}(G)$. Если множество $S \in \mathfrak{R}_3(G)$ делит граф на три части и зависимо с $T \in \mathfrak{R}_3(G)$, то $S \in \mathfrak{D}$, а T — тривиальное и подчинено S.*

2) *Тривиальное множество может быть подчинено не более, чем одному разделяющему множеству.*

Доказательство. 1) Пусть множества $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$ зависимы. Тогда, по следствию 10.1, мы имеем $|\mathrm{Part}(S)| \le 3$ и $|\mathrm{Part}(T)| \le 3$. Пусть $\mathrm{Part}(S) = \{H_1, H_2, H_3\}$. Тогда, если $|\mathrm{Part}(T)| = 3$, то, как показано выше, $v(G) = 6$, но этот случай нам неинтересен. Таким образом, достаточно рассмотреть случай $|\mathrm{Part}(T)| = 2$. Тогда существует такая часть $F \in \mathrm{Part}(T)$, что $|\mathrm{Int}(F) \cap S| = 1$. Пусть $\mathrm{Int}(F) \cap S = \{a\}$. Тогда по следствию 10.2 множество S делит F на три пустые части. Следовательно, $\mathrm{Int}(F) = \{a\}$, то есть, множество T — тривиальное.

2) Пусть T — тривиальное множество, подчиненное двум множествам S и S'. По пункту 1 тогда $|\mathrm{Part}(S)| = |\mathrm{Part}(S')| = 3$, следовательно, множества S и S' независимы. Пусть $A \in \mathrm{Part}(S)$ — часть, содержащая S'. Тогда две вершины множества T не лежат в A и множество S' не может разделить эти две вершины. Противоречие. □

Далее в этом разделе мы будем рассматривать множество $S \in \mathfrak{D}$. Пусть $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2, A_3\}$, $a \in S$, $d_G(a) = 3$ и $\mathrm{N}_G(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$, где $a_i \in \mathrm{Int}(A_i)$ (для всех $i \in \{1, 2, 3\}$).

Очевидно, множество S можно дополнить любым ребром вида aa_i. Обозначим через M_i разрез, получающийся из S заменой всех вершин степени 3 на ребра, соединяющие эти вершины с вершинами их окрестностей, лежащими в $\mathrm{Int}(A_i)$. Из сказанного выше следует, что $M_1, M_2, M_3 \in \mathfrak{T}(G)$.

Замечание 10.8. Разрезы M_1, M_2, M_3 могут быть не максимальными.

Очевидно, что $W(M_i) \subset A_i$, а множество S является одной из границ разреза M_i. Из леммы 10.2 следует, что $A_{i+1} \cup A_{i+2} \in \mathrm{Part}(M_i)$ (нумерация циклическая по модулю 3). Обозначим *другую* часть $\mathrm{Part}(M_i)$ через B_i, пусть $T_i = \mathrm{R}(B_i)$.

Замечание 10.9. 1) У B_i как у части $\mathrm{Part}(M_i)$ определена окрестность — легко видеть, что $\mathrm{O}(B_i) = A_i$.

2) Разрез M_i может быть тривиальным.

Определение 10.8. Множество $F = \{M_1, M_2, M_3\}$ мы будем называть *тройным разрезом* с *осью* S. Все внутренние разделяющие множества разрезов M_i, множество S и все подчиненные ему множества будем называть *внутренними множествами* тройного разреза F. Множества T_i будем называть *границами* тройного разреза F. Определим $W(F) = W(M_1) \cup W(M_2) \cup W(M_3)$ и $\mathrm{Part}(F) = \{B_1, B_2, B_3\}$.

Лемма 10.7. *Пусть F — тройной разрез, а $T \in \mathfrak{R}_3(G)$ таково, что $T \subset W(F)$. Тогда T является внутренним множеством F или его границей.*

Доказательство. Множество, зависимое с осью тройного разреза, по лемме 10.6 должно быть ей подчинино и, следовательно, является внутренним множеством тройного разреза. Множество, независимое с осью тройного разреза содержится в одном из множеств $W(M_i)$. Тогда по лемме 10.4 оно является либо внутренним множеством либо границей разреза M_i, откуда по определению оно является либо внутренним множеством либо границей тройного разреза F. □

Лемма 10.8. *Пусть тройной разрез F с осью S и множество $T \in \mathfrak{R}_3(G)$ таковы, что $T \not\subset W(F)$ и T разделяет $W(F)$. Тогда $|\mathrm{Part}(T)| = 2$ и множество T содержится в одной из частей $A_i \in \mathrm{Part}(S)$.*

Доказательство. Если T зависимо с S, то по лемме 10.6 множество T подчинено S, следовательно, $T \subset W(F)$. Противоречие.

Таким образом, T независимо с S. Пусть, скажем, $T \subset A_i$. Поскольку T разделяет $W(F)$ и $T \neq S$, множество T разделяет $W(M_i)$. Тогда существует вершина $a_i \in W(M_i)$, которую T отделяет от S. По определеию тройного разреза $a_i \in \mathrm{N}_G(a)$, где $a \in S$ и $d_G(a) = 3$. Тогда T зависимо с $R = \mathrm{N}_G(a)$. По лемме 10.6 тривиальное множество R может быть подчинено только одному множеству, следовательно, $|\mathrm{Part}(T)| = 2$. □

10.1.4 Ромашки в трехсвязном графе

Напомним определение ромашки, данное в разделе 9.2. В случае трёхсвязного графа и центр, и лепестки ромашки — одновершинные множества, поэтому, мы можем адаптировать это определение следующим образом.

Рассмотрим набор $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ вершин графа G (где $m \geq 4$), в котором вершины $q_1, \dots, q_m$ считаются *циклически упорядоченными* (то есть, циклическая перестановка множества $q_1, \ldots, q_m$ не меняет набора F). Наборы $(p; q_1, \ldots, q_m)$ и $(p; q_m, \ldots, q_1)$ также считаются одинаковыми.

Введем обозначение $Q_{i,j} = \{q_i, q_j, p\}$. Пусть $\mathfrak{R}(F)$ — набор, состоящий из множеств $Q_{i,j}$ для всех пар различных несоседних в циклическом порядке индексов i и j.

Определение 10.9. Набор $F = (p; q_1, \ldots, q_m)$ будем называть *ромашкой*, если существует такое множество $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}(F) \cap \mathfrak{R}_3(G)$, что

$$\mathrm{Part}(\mathfrak{S}) = \{G_{1,2}, G_{2,3}, \ldots, G_{m,1}\}, \quad \text{причем} \quad \mathrm{Bound}(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1} \quad \text{для всех} \quad i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Вершину p мы будем называть *центром*, а вершины $q_1, \ldots, q_m$ — *лепестками* этой ромашки. Множество $V(F) = \{p, q_1, \ldots, q_m\}$ назовем *множеством вершин* ромашки F. Все множества $Q_{i,j} = \{q_i, q_j, p\}$ мы будем называть *множествами ромашки* F.

Будем говорить, что набор $\mathfrak{S}$ *порождает* ромашку F.

Введенные выше обозначения будем считать стандартными для ромашки. Лепестки ромашки всегда будем указывать в циклическом порядке и рассматривать их индексы, как вычеты по модулю количества лепестков. Введем обозначение $G_{i,j} = \cup_{x=i}^{j-1} G_{x,x+1}$ (индекс x пробегает значения от i до $j-1$ в циклическом порядке). Мы считаем, что $G_{x,x} = \varnothing$.

В лемме 9.5 доказано, что граф зависимости любого набора k-разделяющих множеств, порождающего ромашку, связен. По теореме 9.4 множество $Q_{i,j}$ отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$. Из следствия 9.3 несложно вывести, что $\mathrm{Part}(Q_{i,j}) = \{G_{i,j}, G_{j,i}\}$ при $j \notin \{i, i+1, i-1\}$.

Множества $Q_{1,2}, Q_{2,3}, \ldots, Q_{m,1}$ называются *границами*, а остальные множества $Q_{i,j}$ — *внутренними множествами* ромашки F.

Напомним, что $\mathrm{Part}(F) = \{G_{1,2}, G_{2,3}, \ldots, G_{m,1}\}$. Очевидно, что ни одна из этих частей не может быть малой.

Если часть $G_{i,i+1}$ пуста, то множество $Q_{i,i+1}$ не является разделяющим. Если часть $G_{i,i+1}$ непуста, то множество $Q_{i,i+1}$ — разделяющее множество, $G_{i+1,i} \in \mathrm{Part}(Q_{i,i+1})$, а $G_{i,i+1}$ есть объединение всех отличных от $G_{i+1,i}$ частей $\mathrm{Part}(Q_{i,i+1})$.

Лемма 10.9. *Пусть набор $\mathfrak{S}$ порождает ромашку F. Тогда пересечение множеств набора $\mathfrak{S}$ состоит из одной вершины — центра ромашки F.*

Доказательство. Пусть

$$F = \{p; q_1, \ldots, q_m\}, \quad \mathfrak{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}, \quad P = \cap_{i=1}^{n} S_i.$$

Из $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}(F)$ очевидно, что $P \ni p$. Если $P \neq \{p\}$, то P содержит один из лепестков ромашки, пусть $P \ni q_i$. Тогда все части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}) = \mathrm{Part}(F)$ содержат q_i. Однако, множество вершин $G_{i+1,i-1} \not\ni q_i$ является объединением нескольких частей $\mathrm{Part}(F)$. Противоречие. □

Замечание 10.10. 1) Если часть $G_{i,i+1}$ пуста, то по следствию 10.3 вершины q_i и q_{i+1} смежны.

2) Если обе части $G_{i-1,i}$ и $G_{i,i+1}$ пусты, то $\mathrm{N}_G(q_i) = \{p, q_{i-1}, q_{i+1}\}$.

3) Если множества $S = \{a, u, v\}$, $T = \{a, x, y\} \in \mathfrak{R}_3(G)$ зависимы, то с помощью леммы 3.7 и следствия 10.3 нетрудно понять, что эти два множества образуют ромашку с центром a и лепестками u, x, v, y (следующими именно в таком циклическом порядке).

Таким образом, ромашка в трехсвязном графе напоминает колесо, от которого, согласно теореме 7.5, произошли все трехсвязные графы.

Лемма 10.10. *Если граф зависимости набора $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\} \subset \mathfrak{R}_3(G)$ связен и $\cap_{i=1}^n S_i \neq \varnothing$, то этот набор порождает ромашку.*

Доказательство. Очевидно, можно так перенумеровать множества нашего набора, что для любого $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ граф зависимости набора $\mathfrak{S}_\ell = \{S_1, S_2, \ldots, S_\ell\}$ связен. Докажем индукцей по ℓ, что набор $\mathfrak{S}_\ell$ образует ромашку. База для $\ell = 2$ очевидна из замечания 10.10.

Докажем переход от ℓ к $\ell + 1$. Пусть набор $\mathfrak{S}_\ell$ порождает ромашку $F = (p; q_1, \ldots, q_m)$. Если $S_{\ell+1}$ не разбивает ни одну из частей $\mathrm{Part}(F)$, то $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}_{\ell+1}) = \mathrm{Part}(F)$. В этом разбиении очевидно нет малых частей и по теореме 9.6 переход доказан.

Пусть $S_{\ell+1}$ разбивает одну из частей $\mathrm{Part}(F)$. Так как $p \in S_{\ell+1}$, по замечанию 10.10 множество $S_{\ell+1}$ не может разбивать ни одну из пустых частей $\mathrm{Part}(F)$. Пусть $S_{\ell+1}$ разбивает непустую часть $G_{i,i+1}$. Тогда $S_{\ell+1}$ зависимо с $Q_{i,i+1}$. По лемме 10.9 мы имеем $\cap_{i=1}^{\ell} S_i = \{p\}$, следовательно, $S_{\ell+1} \ni p$. Теперь из зависимости множеств $S_{\ell+1}$ и $Q_{i,i+1}$ следует, что $S_{\ell+1} \cap Q_{i,i+1} = \{p\}$, пересечение $S_{\ell+1} \cap \mathrm{Int}(G_{i,i+1})$ состоит из одной вершины x, а вершины q_i и q_{i+1} лежат в разных частях $\mathrm{Part}(S_{\ell+1})$. Тогда по лемме 3.7 множество $S_{\ell+1}$ разбивает часть $G_{i,i+1}$ на две части с границами $\{q_i, p, x\}$ и $\{q_{i+1}, p, x\}$, обе эти части не являются малыми. Таким образом, в $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}_{\ell+1})$ нет малых частей и по теореме 9.6 этот набор образует ромашку. Переход доказан. □

Определение 10.10. Будем говорить, что ромашка F *содержит* ромашку F', если у них общий центр и $V(F') \subset V(F)$. Назовем ромашку F *максимальной*, если она не содержится ни в какой другой ромашке.

Лемма 10.11. *Пусть $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ — максимальная ромашка. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) Не существует множества $S \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathfrak{R}(F)$, содержащего p и зависимого хотя бы с одним из множеств ромашки F.

2) Пусть $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq 0$. Тогда для любой вершины $v \in \mathrm{Int}(G_{i,i+1})$ существует $q_i q_{i+1}$-путь, не проходящий через v, внутренние вершины которого лежат в $\mathrm{Int}(G_{i,i+1})$.

Доказательство. 1) Предположим противное. Тогда граф зависимости $\mathrm{Dep}(\mathfrak{R}(F) \cup \{S\})$ связен. Кроме того, все множества этого набора содержат вершину p. Тогда по лемме 10.10 существует такая ромашка F', что $\mathfrak{R}(F') \supset \mathfrak{R}(F) \cup \{S\}$. Очевидно, F' содержит F, причем эти ромашки различны. Противоречие с максимальностью F.

2) Предположим противное. В этом случае несложно понять, что множество $T = \{v, p, q_{i+2}\}$ разделяет q_i и q_{i+1}, то есть, является разделяющим и зависимым с $Q_{i,i+1}$. Противоречие с пунктом 1. □

Замечание 10.11. 1) По набору $\mathfrak{R}(F)$ нетрудно восстановить центр и лепестки ромашки F.

2) Нетрудно понять, что ромашка F содержит ромашку F' тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}(F) \subset \mathfrak{R}(F')$.

3) Из пункта 1 леммы 10.11 легко следует, что каждая ромашка содержится в единственной максимальной.

Лемма 10.12. *Множество S, состоящее из трех лепестков ромашки F, не является разделяющим.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$. Тогда все вершины из $G_{i,i+1} \setminus S$ связаны в $G - S$ и в числе этих вершин есть p. Таким образом, в $G - S$ связаны все вершины, кроме, быть может, некоторых лепестков ромашки, не входящих в непустые части $\mathrm{Part}(F)$. Но любой такой лепесток q_j входит в две пустые части $\mathrm{Part}(F)$ и по замечанию 10.10 он смежен с p. Таким образом, граф $G - S$ связен. □

Следствие 10.8. *Любое 3-разделяющее множество, содержащееся в множестве вершин ромашки F, содержит ее центр, то есть, является либо внутренним множеством ромашки F, либо ее границей.*

10.1.5 Связь между ромашками и разрезами

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о том, в каких случаях множества вершин ромашки и разреза могут совпадать или содержаться одно в другом.

Определение 10.11. Будем говорить, что ромашка F *содержится* в разрезе M, если $V(F) \subset W(M)$. Будем говорить, что разрез M *содержится* в ромашке F, если $W(M) \subset V(F)$.

Лемма 10.13. *Ромашка, содержащаяся в разрезе, содержит ровно* 4 *лепестка и имеет две несоседние пустые части.*

Доказательство. Пусть M — разрез и F — ромашка, такие, что $V(F) \subset W(M)$. Очевидно, что $|V(F)| \le |W(M)| \le 6$. При этом, если $V(F) = 6$, то $M \in \mathfrak{T}_3(G)$, $V(F) = W(M)$ и разрез M нетривиален. Тогда центр ромашки F является концом одного из ребер разреза M, а другой конец этого ребра является лепестком ромашки F. Следовательно, оба конца этого ребра принадлежат одному из разделяющих множеств ромашки F, что невозможно по лемме 10.4. Противоречие.

Итак, $V(F) = 5$ и ромашка F содержит ровно 4 лепестка. По соображениям аналогичным изложенным выше, ее центр не может быть соединен ребром разреза M ни с одним из лепестков. Тогда ее лепестки образуют две пары, соединенные ребрами разреза M. Очевидно, что лепестки, образующие пару, являются соседними (поскольку несоседние лепестки не могут быть смежны), а соответствующая им часть пуста так как иначе они были бы соединены путем, проходящим внутри этой части и, следовательно, не пересекающимся с разрезом M. $\square$

Итак, только ромашка с 4 лепестками может содержаться в разрезе. Легко видеть, что для любого нетривиального разреза из $\mathfrak{T}_2(G)$ два его внутренних множества порождают ромашку с 4 лепестками, множество вершин которой совпадает с множеством вершин разреза. Это единственный случай, когда множества вершин разреза и ромашки совпадают. Для любого нетривиального разреза $M \in \mathfrak{T}_3(G)$ в нем содержатся 6 разрезов из $\mathfrak{T}_2(G)$, каждому из которых соответствует ромашка, содержащаяся в M.

Определение 10.12. Назовем ромашку F *невырожденной*, если она не содержится ни в каком разрезе $M \in \mathfrak{T}_3(G)$, и *вырожденной* в противном случае.

Теперь рассмотрим более часто встречающуюся ситуацию, когда разрез содержится в ромашке.

Лемма 10.14. *Пусть* $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ *— максимальная ромашка и* $\{q_i, p, q_j x\} \in \mathfrak{T}(G)$*, причем* $j \notin \{i, i+1, i-1\}$*. Тогда вершина* x *— один из соседних с* q_j *лепестков* F*, причем* $\{q_j, p, x\}$ *— пустая часть* $\mathrm{Part}(F)$.

Доказательство. Понятно, что оба конца ребра q_jx лежат в одной из частей $\mathrm{Part}(F)$. Не умаляя общности можно считать, что $x \in G_{j,j+1}$. Тогда $x \in G_{j,i} \in \mathrm{Part}(Q_{j,i})$ и по лемме 10.1 вершина q_j не смежна с отличными от x вершинами из $\mathrm{Int}(G_{j,i})$.

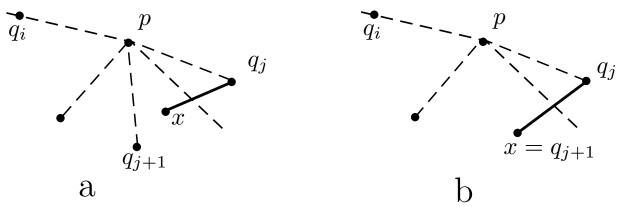


Рис. 10.4: Разрез $\{q_i, p, q_jx\}$ и ромашка F.

Если $x \neq q_{j+1}$, то несложно понять, что множество $\{q_i, p, x\}$ отделяет q_j от q_{j+1} (см. рисунок 10.4a) и, следовательно, является разделяющим. По лемме 10.11, это противоречит максимальности ромашки F. Значит, $x = q_{j+1}$ (см. рисунок 10.4b). Тогда q_j не смежна ни с какой вершиной из $\mathrm{Int}(G_{j,j+1})$, откуда следует пустота части $G_{j,j+1}$. $\square$

Следствие 10.9. 1) *Пусть нетривиальный разрез M и ромашка $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ таковы, что $W(M) \subset V(F)$. Тогда $p \in M$ и любое ребро разреза M имеет вид q_jq_{j+1}, где часть $G_{j,j+1}$ пуста.*

2) *Пусть $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ — ромашка и $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) = \varnothing$. Тогда $\{q_j, p, q_iq_{i+1}\} \in \mathfrak{T}_1(G)$ для всех $j \notin \{i, i{+}1\}$. Если, кроме того, $\mathrm{Int}(G_{j,j+1}) = \varnothing$ и $i \neq j$, то $\{q_{j+1}q_j, p, q_iq_{i+1}\} \in \mathfrak{T}_2(G)$.*

Доказательство. 1) Поскольку как минимум одна из границ разреза M по лемме 10.2 является разделяющим множеством, она по лемме 10.12 содержит центр ромашки. Следовательно, $p \in W(M)$. Предположим, что $px \in M$. Тогда x — лепесток F, а значит, существует разделяющее множество ромашки F, содержащее p и x, что противоречит лемме 10.4. Таким образом, $p \in M$.

Пусть $xy \in M$. Рассмотрим максимальную ромашку F', содержащую F. Поскольку x и y — смежные лепестки F, они — соседние как в F, так и в F'. По лемме 10.14 часть $\mathrm{Part}(F')$ с границей $\{p, x, y\}$ — пуста, то есть, $\{p, x, y\} \notin \mathfrak{R}_3(G)$. Тогда и соответствующая часть $\mathrm{Part}(F)$ пуста.

2) Нетрудно проверить, что каждое из этих множеств отделяет q_i от q_{i+1}. $\square$

Замечание 10.12. Тривиальный разрез также может содержаться в ромашке, если в ней есть две соседние пустые части. Тогда ребра, соединяющие их общий лепесток с соседними лепестками и центром, образуют тривиальный разрез. Нетрудно проверить, что любой максимальный тривиальный разрез, содержащийся в максимальной ромашке, имеет такой вид.

Определение 10.13. Пусть $G_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(F)$ — непустая часть. Определим множество $M_{i,i+1}$ следующим образом.

1° $p \in M_{i,i+1}$;

2° $q_{i-1}q_i \in M_{i,i+1}$, если $\mathrm{Int}(G_{i-1,i}) = \varnothing$, и $q_i \in M_{i,i+1}$ в противном случае;

3° $q_{i+2}q_{i+1} \in M_{i,i+1}$, если $\mathrm{Int}(G_{i+1,i+2}) = \varnothing$, и $q_{i+1} \in M_{i,i+1}$ в противном случае.

Если хотя бы одна из частей $G_{i-1,i}$ и $G_{i+1,i+2}$ пуста, назовем $M_{i,i+1}$ *граничным разрезом* части $G_{i,i+1}$.

Замечание 10.13. 1) По следствию 10.9, мы имеем $M_{i,i+1} \in \mathfrak{T}^+(G)$.

2) Заметим, что граничный разрез части может не быть максимальным. Если x — единственная вершина части $G_{i,i+1}$, смежная с p, то множество $M_{i,i+1}$ можно дополнить ребром px.

3) Отметим также, что если $M_{i,i+1} \in \mathfrak{T}(G)$, то $G_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(M_{i,i+1})$.

Лемма 10.15. *Пусть $F = (p; q_1, \ldots, q_m)$ — максимальная невырожденная ромашка, а $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если множество $Q_{i,i+1}$ можно дополнить ребром px, то $x \in \mathrm{Int}(G_{i,i+1})$.*

2) *Если $M_{i,i+1} \in \mathfrak{T}(G)$, то разрез $M_{i,i+1}$ нельзя дополнить никаким ребром, кроме, возможно, ребра px, где $x \in \mathrm{Int}(G_{i,i+1})$ и x — единственная вершина части $G_{i,i+1}$, смежная с p.*

Доказательство. 1) Пусть $x \notin \mathrm{Int}(G_{i,i+1})$. Тогда $x \in V(G) \setminus G_{i,i+1}$. Заметим, что $\mathrm{Int}(G_{i+1,i}) = V(G) \setminus G_{i,i+1}$ — компонента связности графа $G - Q_{i,i+1}$ и по лемме 10.1 x — единственная вершина этой компоненты связности, смежная с p. С другой стороны, вершина p должна быть смежна хотя бы с одной внутренней вершиной любой непустой части $\mathrm{Part}(F)$ и, по замечанию 10.10, с общим лепестком любых двух соседних пустых частей.

Тогда среди частей, отличных от $G_{i,i+1}$, может быть не более одной непустой. Если непустых частей среди них нет, то есть как минимум три пустые части подряд, содержащие как минимум 2 смежных с p лепестка не из $G_{i,i+1}$, что невозможно. Таким образом, в $\mathrm{Part}(F)$ ровно две непустые части и нет соседних пустых частей (см. рисунок 10.5a). Это означает, что $m = 4$, $\mathrm{Int}(G_{i-1,i}) = \mathrm{Int}(G_{i+1,i+2}) = \varnothing$ и $\mathrm{Int}(G_{i+2,i-1}) \neq \varnothing$. Тогда $M_{i,i+1} = \{q_i q_{i-1}, q_{i+1}q_{i+2}, p\}$ и дополнив его ребром px мы получим разрез $M = \{q_i q_{i-1}, px, q_{i+1}q_{i+2}\} \in \mathfrak{T}_3(G)$, в котором содержится ромашка F. Тогда F — вырожденная, противоречие.

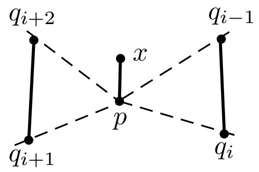


Рис. 10.5: Ромашка F содержится в разрезе $\{q_i q_{i-1}, px, q_{i+1}q_{i+2}\}$.

2) Пусть разрез $M_{i,i+1}$ можно дополнить ребром e. Тогда этим же ребром можно дополнить и множество $Q_{i,i+1}$. Следовательно, по предыдущему пункту, это не может быть ребро вида px, где $x \in \mathrm{Int}(G_{i+1,i})$.

Предположим, что $e = q_i v$ (случай $e = q_{i+1}v$ аналогичен). Тогда, поскольку $M_{i,i+1} \in \mathfrak{T}(G)$, мы получаем, что $M_{i,i+1} = \{q_i, p, q_{i+1}q_{i+2}\}$. Следовательно, $\{q_i v, p, q_{i+2}\} \in \mathfrak{T}(G)$. Тогда по лемме 10.14 мы получаем, что $v = q_{i+1}$ и $\mathrm{Int}(Q_{i,i+1}) = \varnothing$ или $v = q_{i-1}$ и $\mathrm{Int}(Q_{i,i-1}) = \varnothing$. Первый случай невозможен по условию, а во втором случае $e = q_i q_{i-1} \in M_{i,i+1}$, противоречие.

Итак единственный возможный случай — $e = px$, где $x \in \mathrm{Int}(G_{i,i+1})$. Тогда по лемме 10.1 единственная вершина части $G_{i,i+1}$, смежная с p — это x. □

Лемма 10.16. *Пусть максимальный нетривиальный разрез M и $S \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathfrak{R}(M)$ таковы, что S разделяет $W(M)$. Тогда $|\mathrm{Part}(S)| = 2$ и выполняется одно из следующих двух утверждений.*

1° *Разрез M содержится в ромашке, порожденной набором $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}(M) \cup \{S, T_1^M, T_2^M\}$.*

2° *Множество S содержится в окрестности одной из частей $\mathrm{Part}(M)$ (пусть, скажем, $S \subset \mathrm{O}(G_1^M)$). Существует такое ребро $x_1x_2 \in M$, что S отделяет вершину $x_1 \in T_1^M$ от остальных вершин множества $W(M) \setminus S$, при этом, $S \setminus G_1^M = \{x_2\}$.*

Доказательство. Можно считать, что $S \cap \mathrm{Int}(G_1^M) \neq \varnothing$. Докажем, что $|S \cap G_1^M| = 2$. Предположим противное, пусть $S \cap G_1^M = \{x\}$. Тогда $x \in \mathrm{Int}(G_1^M)$ и $S \cap T_1^M = \varnothing$. Значит, по следствию 10.2 множество S должно отделять одну из вершин множества T_1^M (обозначим ее y) от остальных вершин этого множества (см. рисунок 10.6а). Но тогда по следствию 10.6 разрез M можно дополнить ребром xy. Противоречие с максимальностью разреза M.

Рассмотрим два случая.

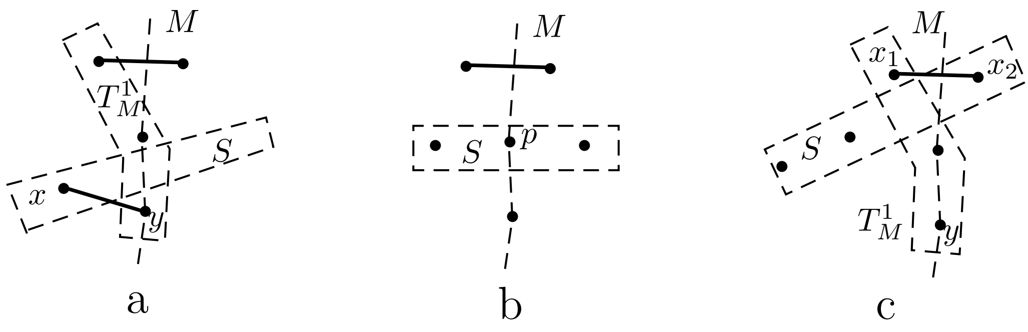


Рис. 10.6: Разрез M и множество S.

1. $S \cap \mathrm{Int}(G_2^M) \neq \varnothing$.
В этом случае множество S зависимо со всеми множествами $\mathfrak{R}(M)$, а также с T_1^M и T_2^M. Следовательно, граф зависимости набора $\mathfrak{S}$ связен.

Аналогично доказанному выше, $|S \cap G_2^M| = 2$, а значит, $S \cap G_1^M \cap G_2^M \neq \varnothing$ (см. рисунок 10.6b). Следовательно, существует вершина $p \in M \cap S$. Но тогда эта вершина принадлежит всем множествам набора $\mathfrak{S}$, откуда по лемме 10.10 вытекает, что набор $\mathfrak{S}$ порождает ромашку F, содержащую разрез M (то есть, выполнено утверждение 1°). При этом $S \in \mathfrak{R}(F)$, следовательно, $|\mathrm{Part}(S)| = 2$.

2. $S \cap \mathrm{Int}(G_2^M) = \varnothing$.
В этом случае $S \subset \mathrm{O}(G_1^M)$, множество S независимо с T_2^M и зависимо с T_1^M. Так как $|S \cap G_1^M| = 2$, можно считать, что $S \setminus G_1^M = \{x_2\}$. Так как $x_2 \in \mathrm{O}(G_1^M) \setminus G_1^M$, то существует ребро $x_1x_2 \in M$, причем $x_1 \in T_1^M$ (см. рисунок 10.6c). Тогда очевидно, что S не разделяет G_2^M, следовательно, все вершины множества $W(M) \setminus S$, кроме x_1, лежат в одной компоненте связности графа $G - S$ (то есть, выполнено утверждение 2°). В частности, это означает что S разделяет множество T_1^M ровно на 2 части, следовательно, $|\mathrm{Part}(S)| = 2$. □

10.1.6 Множества, разделяющие ромашку

В этом разделе мы рассмотрим множества из $\mathfrak{R}_3(G)$, разделяющие множество вершин ромашки.

Лемма 10.17. *Пусть $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ — максимальная невырожденная ромашка, а $T \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathfrak{R}(F)$. Предположим, что T разделяет $V(F)$. Тогда $|\mathrm{Part}(T)| = 2$ и выполняется одно из следующих двух утверждений.*

1° *Множество T отделяет одну из вершин множества $V(F)$ от остальных вершин этого множества.*

2° *Множество T отделяет два соседних лепестка q_{i+1}, q_{i+2} от остальных вершин множества $V(F)$. При этом $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) = \mathrm{Int}(G_{i+2,i+3}) = \varnothing$ и $T = \{q_i, x, q_{i+3}\}$, где $x \in \mathrm{Int}(G_{i+1,i+2})$ — единственная вершина части $G_{i+1,i+2}$, смежная с p.*

Доказательство. Заметим, что по лемме 10.11 мы имеем $p \notin T$. Если T не разделяет множество $L = \{q_1, \dots, q_m\}$, то оно отделяет p от L, следовательно, выполнено утверждение 1°. Таким образом, далее достаточно рассмотреть случай, когда T разделяет L.

Докажем, что $T \cap L \neq \varnothing$. Действительно, при $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$ и $|T \cap \mathrm{Int}(G_{i,i+1})| \leq 1$ по лемме 10.11 вершины q_i и q_{i+1} связаны в $G - T$. Если же $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) = \varnothing$, то лепестки q_i и q_{i+1} смежны. Так как существует не более одной такой части $G_{j,j+1}$, что $|T \cap \mathrm{Int}(G_{j,j+1})| \geq 2$, все пары соседних лепестков (кроме, возможно, одной) не разделены множеством T. Следовательно, если $T \cap L = \varnothing$, то все вершины множества L связаны в $G - T$. Противоречие.

Заметим, что $|T \cap L| \leq 2$ по лемме 10.12. Рассмотрим следующие два случая.

1. $T \cap L = \{q_i\}$.
В этом случае обе оставшиеся вершины множества T должны лежать в одной части $\mathrm{Part}(F)$, иначе, аналогично доказанному выше, множество T не разделяет L. Пусть эта часть — $G_{j,j+1}$. Тогда очевидно, что множество T разбивает L на $L_1 = \{q_{i+1}, \dots, q_j\}$ и $L_2 = \{q_{j+1}, \dots, q_{i-1}\}$.

Не умаляя общности предположим, что T отделяет p от L_1. Докажем, что тогда $i+1 = j$. Действительно, в противном случае $T \cap \mathrm{Int}(G_{i,j}) = \varnothing$ (см. рисунок 10.7a), следовательно, множество T не разделяет часть $G_{i,j}$, то есть, вершины p и $q_{i+1} \in \mathrm{Int}(G_{i,j})$ связаны в $G - T$. Противоречие.

Если T отделяет p и от L_2, то аналогично получаем, что $i - 1 = j + 1$. Но тогда F имеет всего 3 лепестка: q_i, q_j и q_{j+1}, что невозможно. Значит, T не разделяет множество $L_2 \cup \{p\} = V(F) \setminus \{q_j\}$ и отделяет от него лепесток q_j. Таким образом, выполняется утверждение 1°.

2. $T \cap L = \{q_i, q_j\}$.
В этом случае очевидно, что множество T разбивает L на множества $L_1 = \{q_{i+1}, \dots, q_{j-1}\}$ и $L_2 = \{q_{j+1}, \dots, q_{i-1}\}$. Можно не умаляя общности считать, что третья вершина множества T не лежит в части $G_{j,i}$. Тогда $T \cap \mathrm{Int}(G_{j,i}) = \varnothing$, следовательно, T не разделяет $L_2 \cup \{p\}$.

Докажем, что тогда $|L_1| \leq 2$. Действительно, в противном случае $q_{j-1} \in \mathrm{Int}(G_{i+2,j})$, $q_{i+1} \in \mathrm{Int}(G_{i,i+2})$ и $\mathrm{Int}(G_{i,i+2}) \cap \mathrm{Int}(G_{i+2,j}) = \varnothing$ (см.

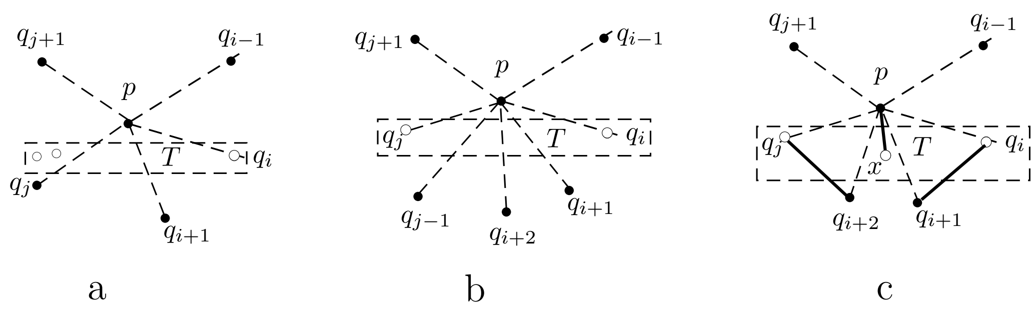


Рис. 10.7: Множество T разделяет $V(F)$.

рисунок 10.7b). Множество T, отделяющее p и от q_{i+1}, и от q_{j-1}, должно пересекаться с внутренностями обеих этих частей, что невозможно. Противоречие.

Если $j = i + 2$, то множество T отделяет лепесток q_{i+1} от остальных вершин ромашки F. Рассмотрим случай $j = i + 3$. Тогда T отделяет лепестки q_{i+1}, q_{i+2} от остальных вершин множества $V(F)$. Следовательно, среди частей $G_{i,i+1}$, $G_{i+1,i+2}$, $G_{i+2,i+3}$ не более одной непустой (поскольку в каждой непустой части есть путь, соединяющий ее лепесток с центром ромашки, и проходящий по внутренним вершинам этой части) и нет двух соседних пустых частей (поскольку по замечанию 10.10 их общий лепесток смежен с центром). Это возможно только если $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) = \mathrm{Int}(G_{i+2,i+3}) = \varnothing$ и $\mathrm{Int}(G_{i+1,i+2}) \neq \varnothing$ (см. рисунок 10.7c). Тогда очевидно, что $T = \{q_i, x, q_{i+3}\}$, где $x \in \mathrm{Int}(G_{i+1,i+2})$. Кроме того, множества T и $Q_{i+1,i+2}$ зависимы и $\{p, x\} \in \mathrm{Part}(\{T, Q_{i+1,i+2}\})$. Следовательно, x — единственная вершина части $G_{i+1,i+2}$, смежная с p. Таким образом, выполняется утверждение 2°.

Во всех случаях очевидно, что $|\mathrm{Part}(T)| = 2$, поскольку множество T зависимо с некоторыми множествами ромашки F и делит каждое из них ровно на 2 части. □

Подробно остановимся на случае 1° леммы 10.17.

Лемма 10.18. *Пусть максимальная невырожденная ромашка $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ и множество $T \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathfrak{R}(F)$ таковы, что T отделяет лепесток q_i от остальных вершин множества $V(F)$. Тогда ровно одна из частей* $\mathrm{Part}(F)$*, содержащих q_i, пуста, и множество T состоит из второго лепестка этой части и двух вершин другой части, содержащей q_i.*

Доказательство. Пусть $q_i \in H \in \mathrm{Part}(T)$. По условию q_i — единственная вершина из $V(F)$, лежащая в $\mathrm{Int}(H)$. Тогда $\mathrm{Int}(H) \cap Q_{i-1,i+1} = \varnothing$, следовательно, $Q_{i-1,i+1}$ не разделяет H. Это означает, что $H \subset G_{i-1,i+1}$ и, в частности, $T \subset G_{i-1,i+1}$.

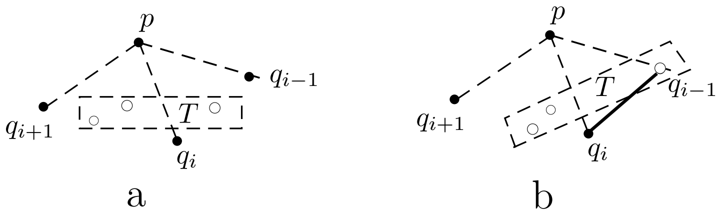


Рис. 10.8: Множество T отделяет лепесток q_i.

Заметим также, что $p \notin T$ по лемме 10.11 и, очевидно, $q_i \notin T$. Следовательно, в одной из частей $G_{i-1,i}$ и $G_{i,i+1}$ содержится не более одной вершины множества T. Не умаляя общности можно считать, что эта часть $G_{i-1,i}$ (см. рисунок 10.8a). Очевидно, что $|T \cap G_{i-1,i}| = 1$, иначе вершины q_i и q_{i-1} связаны в $G - T$. Более того, если $T \cap G_{i-1,i} \neq \{q_{i-1}\}$, то по лемме 10.11 в части $G_{i-1,i}$ есть путь, соединяющий q_i и q_{i-1} и не пересекающийся с T, что невозможно. Следовательно, $T \cap G_{i-1,i} = \{q_{i-1}\}$, то есть $T \cap \mathrm{Int}(G_{i-1,i}) = \varnothing$. Но T разделяет вершины $p, q_i \in G_{i-1,i}$. Это возможно, только если $\mathrm{Int}(G_{i-1,i}) = \varnothing$ (см. рисунок 10.8b). Тогда $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$, так как иначе по замечанию 10.10 вершины q_i и p смежны. □

Лемма 10.19. *Пусть разделяющее множество $T \in \mathfrak{R}_3(G)$ отделяет центр невырожденной ромашки $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ от остальных вершин множества $V(F)$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1) *В $\mathrm{Part}(F)$ не более трех непустых частей, а $m \leq 6$.*

2) *Пусть $G_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(F)$ — непустая часть. Тогда*

$$|\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \cap T| = 1, \quad \text{и} \quad Q_{i,i+1} \cap T = \varnothing.$$

3) *Если $|\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \cap T| = \{x\}$, то множество $M_{i,i+1}$ можно дополнить ребром px.*

4) *$d_G(p) = 3$ и $T = \mathrm{N}_G(p)$.*

Доказательство. 1) Пусть в $\mathrm{Part}(F)$ ровно k непустых и ℓ пустых частей. Если $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$, то $Q_{i,i+1}$ — разделяющее множество, зависимое с T. Следовательно, $T \cap \mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$. Таким образом, $k \leq 3$. Далее, если $\mathrm{Int}(G_{j-1,j}) = \mathrm{Int}(G_{j,j+1}) = \varnothing$, то по замечанию 10.10 вершины p и q_j смежны, следовательно, $q_j \in T$. Заметим, что пустые части $\mathrm{Part}(F)$ разбиваются на не более, чем k последовательностей, что дает нам не менее $\ell - k$ лепестков, смежных с p. Таким образом, $3 = |T| \geq k + (\ell - k) = \ell$, следовательно, $m = k + \ell \leq 6$.

2) Пусть $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$ и $|T \cap G_{i,i+1}| = 2$. Тогда $|T \cap \mathrm{Int}(G_{i+1,i})| = 1$, пусть $T \cap \mathrm{Int}(G_{i+1,i}) = \{x\}$. Поскольку $m \geq 4$, то $G_{i+1,i}$ является объединением как минимум трёх частей $\mathrm{Part}(F)$. Так как T содержит внутреннюю вершину каждой непустой части $\mathrm{Part}(F)$ и общий лепесток двух соседних пустых частей, равенство $|T \cap \mathrm{Int}(G_{i+1,i})| = 1$ возможно только в случае, когда $m = 4$, $\mathrm{Int}(G_{i+1,i+2}) = \mathrm{Int}(G_{i+3,i}) = \varnothing$ и $x \in \mathrm{Int}(G_{i+2,i+3})$ (и мы имеем один из случаев, изображенных на рисунке 10.9ab). Тогда $T \cap G_{i+2,i+3} = \{x\}$ и $\{p, x\} \in \mathrm{Part}(\{T, Q_{i+2,i+3}\})$. Следовательно, по лемме 10.1 множество $Q_{i,i+1}$ можно дополнить ребром px — противоречие с леммой 10.15 (в этом случае ромашка F содержится в трёхрёберном разрезе $\{q_{i+1}q_{i+2}, px, q_iq_{i+3}\}$).

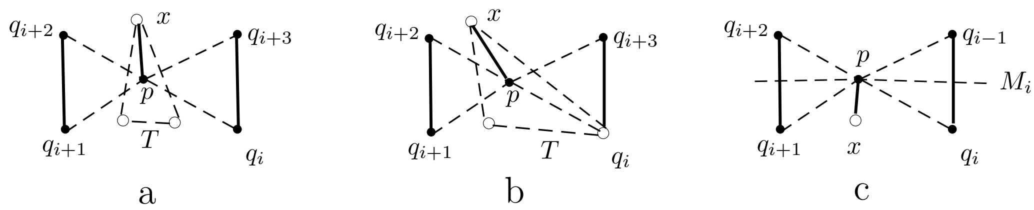


Рис. 10.9: Множество T отделяет центр p.

3) Из пункта 2 следует, что $G_{i,i+1} \cap T = \{x\}$, и, так как T отделяет p от $\{q_i, q_{i+1}\}$, x — единственная вершина части $G_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(M_{i,i+1})$, смежная с вершиной $p \in M_{i,i+1}$ (см. рисунок 10.9c). Следовательно, по лемме 10.1 множество $M_{i,i+1}$ можно дополнить ребром px.

4) Итак, если $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$, то $|T \cap \mathrm{Int}(G_{i,i+1})| = 1$ и $T \cap Q_{i,i+1} = \varnothing$. Кроме того, если $T \cap \mathrm{Int}(G_{i,i+1}) = \{u\}$, то $\{p, u\} \in \mathrm{Part}(\{T, Q_{i,i+1}\})$ по следствию 10.2, то есть, множество T отделяет p от всех остальных вершин части $G_{i,i+1}$. Поскольку это верно для всех непустых частей и T содержит все лепестки, не входящие в непустые части, то множество T отделяет p от остальных вершин графа G, то есть, $T = \mathrm{N}_G(p)$. □

10.1.7 Особые ромашки

В этом разделе мы опишем ромашки, центр которых можно отделить от остальных вершин множеством из $\mathfrak{R}_3(G)$.

Определение 10.14. Пусть $F = (p; q_1, \ldots, q_m)$ — невырожденная ромашка.

1) Назовём F *особой*, если $d_G(p) = 3$ и *неособой* в противном случае.

2) Пусть F — особая. Назовем *окрестностью особой ромашки* F множество

$$\mathrm{O}(F) = V(F) \cup \mathrm{N}_G(p).$$

Замечание 10.14. 1) Если существует множество $T \in \mathfrak{R}_3(G)$, отделяющее центр p невырожденной ромашки F от остальных вершин из $V(F)$, то по лемме 10.19 ромашка F — особая и $T = \mathrm{N}_G(p)$,

2) Наоборот, если p — центр особой ромашки, то $\mathrm{N}_G(p) \in \mathfrak{R}_3(G)$. По лемме 10.19 внутренность любой непустой части $\mathrm{Part}(F)$ содержит ровно одну вершину множества $\mathrm{N}_G(p)$, а ее граница не пересекается с $\mathrm{N}_G(p)$.

Определение 10.15. Пусть $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ — особая ромашка, а $G_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(F)$ — непустая часть.

1) Обозначим через $u_{i,i+1}$ единственную вершину из $\mathrm{Int}(G_{i,i+1})$, смежную с p.

2) По пункту 3 леммы 10.19, множество $M_{i,i+1}$ можно дополнить ребром $pu_{i,i+1}$. Обозначим полученный в результате дополнения разрез через $M'_{i,i+1}$. Будем использовать обозначения $G'_{i,i+1} = G_{i,i+1} \setminus \{p\}$ и $Q'_{i,i+1} = \mathrm{Bound}(G'_{i,i+1}) = \{q_i, q_{i+1}, u_{i,i+1}\}$.

Множества $Q'_{i,i+1}$ (где $\mathrm{Int}(G'_{i,i+1}) \neq \varnothing$) назовем *границами* окрестности особой ромашки F.

Замечание 10.15. Очевидно, $G'_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(M'_{i,i+1})$.

Опишем более детально, как может выглядеть особая ромашка $F = (p; q_1, \dots, q_m)$. Рассмотрим несколько случаев.

1. *В* $\mathrm{Part}(F)$ *три непустые части.*
Тогда $\mathrm{N}_G(p)$ содержит по вершине во внутренности каждой из этих частей, следовательно, центр p не смежен ни с одним из лепестков F. Отсюда по замечанию 10.10 следует, что две соседние части $\mathrm{Part}(F)$ не могут быть пустыми. Таким образом, $m \in \{4, 5, 6\}$. Три вида особых ромашек с тремя непустыми частями изображены на рисунке 10.10.

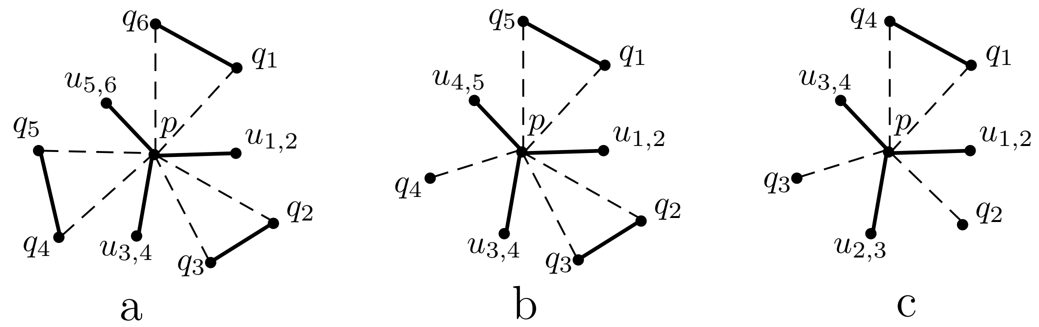


Рис. 10.10: Особые ромашки с тремя непустыми частями.

2. *В* $\mathrm{Part}(F)$ *две непустые части.*
Тогда внутренность каждой из них содержит ровно по одной вершине множества $\mathrm{N}_G(p)$, а третья вершина $\mathrm{N}_G(p)$ — лепесток q_i, не входящий в непустые части $\mathrm{Part}(F)$ (то есть, $\mathrm{Int}(G_{i-1,i}) = \mathrm{Int}(G_{i,i+1}) = \varnothing$). Поскольку все вершины, смежные с p, лежат в $\mathrm{N}_G(p)$, в $\mathrm{Part}(F)$ кроме четырех указанных частей может быть только одна пустая часть, причем соседняя с двумя непустыми. Таким образом, $m \in \{4, 5\}$.

Если $m = 4$, то лепестки можно занумеровать так, что $\mathrm{Int}(G_{3,4}) = \mathrm{Int}(G_{4,1}) = \varnothing$ (пустые части должны быть соседними!), части $G_{1,2}$ и $G_{2,3}$ — непустые, а $\mathrm{N}_G(p) = \{u_{1,2}, u_{2,3}, q_4\}$ (рисунок 10.11a). Отметим, что в этом случае $F' = (q_4; u_{1,2}, q_2, u_{2,3}, p)$ — особая ромашка точно такого же типа, ее центр q_4 от остальных вершин графа отделяется множеством $\{q_1, p, q_3\}$. Легко видеть, что $\mathrm{O}(F) = \mathrm{O}(F')$. Назовем особые ромашки F и F' *двойственными.*

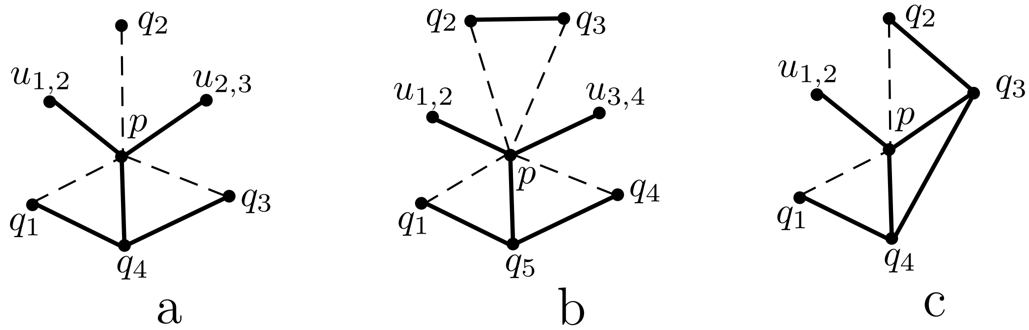


Рис. 10.11: Особые ромашки с двумя и одной непустыми частями.

Если $m = 5$, то лепестки можно занумеровать так, что $G_{4,5}$ и $G_{5,1}$ — две соседние пустые части, $G_{1,2}$ и $G_{3,4}$ — непустые, а $\mathrm{N}_G(p) = \{u_{1,2}, u_{3,4}, q_5\}$ (рисунок 10.11b). Отметим, что в этом случае $F' = (q_5; u_{1,2}, q_2, q_3, u_{3,4}, p)$ — особая ромашка точно такого же типа, ее центр q_5 от остальных вершин графа отделяется множеством $\{q_1, p, q_4\}$ и при этом $\mathrm{O}(F) = \mathrm{O}(F')$. Назовем особые ромашки F и F' *двойственными.*

3. *В* $\mathrm{Part}(F)$ *одна непустая часть.*
Докажем, что в таком случае ромашка F — вырожденная (а значит, не является особой). Пусть $G_{1,2}$ — единственная непустая часть $\mathrm{Part}(F)$. Тогда $u_{1,2} \in \mathrm{N}_G(p)$, а две другие вершины $\mathrm{N}_G(p)$ по лемме 10.19 — лепестки ромашки, отличные от q_1 и q_2. По замечанию 10.10, общий лепесток двух соседних пустых частей смежен с p, то есть, входит в $\mathrm{N}_G(p)$. Следовательно, пустых частей ровно три (то есть, $m = 4$), а $\mathrm{N}_G(p) = \{u_{1,2}, q_3, q_4\}$ (см. рисунок 10.11c). Тогда нетрудно понять, что $\{u_{1,2}p, q_1q_4, q_2q_3\} \in \mathfrak{T}_3(G)$ —

разрез, содержащий ромашку F. Следовательно, ромашка F — вырожденная.

Лемма 10.20. *Пусть $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ — особая ромашка, а $T \subset \mathrm{O}(F)$ и $T \in \mathfrak{R}_3(G)$. Тогда выполнено одно из следующих условий:*

1° $T = Q_{i,j}$;

2° $T = \mathrm{N}_G(p)$;

3° T — *внутреннее множество разреза* $M'_{i,i+1}$;

4° $T = Q'_{i,i+1}$, *где* $\mathrm{Int}(G'_{i,i+1}) \neq \varnothing$ *(то есть, T — граница окрестности F).*

Доказательство. Если $T \subset V(F)$, то $T = Q_{i,j}$ по следствию 10.8. Пусть, скажем, $G_{1,2} \in \mathrm{Part}(F)$ — непустая часть и $u_{1,2} \in T$. Тогда $p \notin T$, так как $M = \{q_1, q_2, pu_{1,2}\}$ — разрез, а разделяющее множество не может содержать двух вершин ребра разреза по лемме 10.4. Предположим, что T не содержится в разрезе M (иначе T содержится и в разрезе $M'_{1,2}$ и лемма доказана). Тогда из $T \subset \mathrm{O}(F)$ следует, что T зависимо с $Q_{1,2}$, то есть, разделяет $V(F)$.

Если T отделяет центр p от остальных вершин графа, то $T = \mathrm{N}_G(p)$ по лемме 10.19 и утверждение доказано. По лемме 10.17 остается две возможности: T может отделять от остальных вершин ромашки один из лепестков или два соседних лепестка. Рассмотрим два случая.

1. *T отделяет один лепесток F от остальных.*
Так как T зависимо с $Q_{1,2}$, не умаляя общности можно считать, что это лепесток q_2. Тогда по лемме 10.18 часть $G_{2,3}$ пуста, а T содержит q_3 и две вершины части $G_{1,2}$ (см. рисунок 10.11b). Так как $T \subset \mathrm{O}(F)$, мы получаем, что $T = \{u_{1,2}, q_1, q_3\}$ — внутреннее множество разреза $M'_{1,2}$, что и требовалось доказать.

2. *T отделяет два лепестка F от остальных.*
Тогда по пункту 2 леммы 10.17 это могут быть только лепестки q_1 и q_2, причем обе части $G_{m,1}$ и $G_{2,3}$ пусты, а $T = \{u_{1,2}, q_3, q_m\}$ (см. рисунок 10.10a). В этом случае также T — внутреннее множество разреза $M'_{1,2}$, что и требовалось доказать. □

Лемма 10.21. *Пусть $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ — особая ромашка, а F' — такая максимальная невырожденная ромашка, что $F' \neq F$, $V(F') \subset \mathrm{O}(F)$ и F' не содержится ни в одном из разрезов $M'_{i,i+1}$ ромашки F. Тогда ромашки F и F' — двойственные.*

Доказательство. Пусть p' — центр F'. Рассмотрим несколько случаев, чем может быть p'.

1. $p' = p$.

Из леммы 10.20 следует, что все содержащие p множества из $\mathfrak{R}_3(G)$, лежащие в $\mathrm{O}(F)$ — это множества ромашки F. Тогда $F' = F$, противоречие.

2. $p' = u_{1,2}$.
Тогда часть $G_{1,2}$ непуста и $u_{1,2}$ лежит ровно в одном из разрезов $M'_{i,i+1}$ — в разрезе $M'_{1,2}$. По лемме 10.20 все содержащие $u_{1,2}$ множества из $\mathfrak{R}_3(G)$, лежащие в $\mathrm{O}(F)$ — это $T = \mathrm{N}_G(p)$ и множества, содержащиеся в разрезе $M'_{1,2}$ — но легко видеть, что все эти множества независимы с T. Следовательно, ромашка F' содержится в $M'_{1,2}$, противоречие.

3. $p' = q_k$ *— лепесток* F*, несмежный с центром* p*.*
Множества ромашки F, содержащие q_k, попарно независимы (так как все они содержат $\{p, q_k\}$). Значит, $V(F') \not\subset V(F)$, то есть, ромашка F' должна содержать вершину $u_{i,i+1}$ для некоторого i.

Докажем, что тогда $V(F') \subset W(M'_{i,i+1})$ и, тем самым, получим противоречие с условием. Действительно, пусть существует вершина $x \in V(F') \setminus W(M'_{i,i+1}) \subset \mathrm{O}(F) \setminus W(M'_{i,i+1})$, отличная от q_k. Тогда 3-вершинное множество $S = \{q_k, u_{i,i+1}, x\}$ состоит из центра и двух лепестков F'. Это множество не может быть границей пустой части $\mathrm{Part}(F')$, так как тогда по замечанию 10.10 было бы $u_{i,i+1}x \in E(G)$, что невозможно: вершина $u_{i,i+1} \in \mathrm{Int}(G_{i,i+1})$ может быть смежна в $\mathrm{O}(F)$ только с $p, q_i, q_{i+1} \in W(M'_{i,i+1})$. Значит, $S \in \mathfrak{R}_3(G)$. В случае, когда $V(F') \setminus W(M'_{i,i+1}) = \{q_k\}$ рассмотрим произвольное множество $S \in \mathfrak{R}(F')$, содержащее лепесток $u_{i,i+1}$. В обоих случаях множество $S \supset \{u_{i,i+1}, q_k\}$, а значит, $S \neq \mathrm{N}_G(p)$ (так как $q_k \notin \mathrm{N}_G(p)$) и S не является множеством ромашки F (так как $u_{i,i+1} \notin V(F)$). Кроме того, S не может содержаться в разрезе $M'_{j,j+1}$ при $j \neq i$, так как $u_{i,i+1} \notin W(M'_{i,i+1})$. Получили противоречие с леммой 10.20.

4. p' *— лепесток* F*, смежный с центром* p*.*
Тогда все содержащие p' и лежащие в $\mathrm{O}(F)$ множества из $\mathfrak{R}_3(G)$ в силу леммы 10.20 и описания особых ромашек — это в точности все множества ромашки, двойственной к F (см. $p' = q_4$ на рисунке 10.11a и $p' = q_5$ на рисунке 10.11b). Ввиду максимальности, F' — именно эта ромашка, что и требовалось доказать. □

10.2 Комплексы

Мы представим множество $\mathfrak{R}_3(G)$ как объединение нескольких *комплексов*. Это будут *комплекс тройного разреза*, *комплекс ромашки*, *комплекс большого разреза*, *комплекс малого разреза*, *комплекс одиночного множества* и *тривиальный комплекс*. В разбиении графа каждым комплексом будут выделены *главные* части — непустые части, которые могут содержать другие комплексы. Далее с помощью теоремы о разбиении (теоремы 4.5) мы построим гипердерево взаимного расположения комплексов. В результате получится полная картина взаимного расположения трехвершинных разделяющих множеств в произвольном трехсвязном графе.

Определение 10.16. Множеством вершин любого комплекса $\mathcal{C}$ назовем множество $V(\mathcal{C})$, являющееся объединением всех входящих в $\mathcal{C}$ разделяющих множеств.

10.2.1 Комплекс тройного разреза

Определение 10.17. Для любого тройного разреза F назовем *комплексом тройного разреза* $\mathcal{C}_F$ набор, состоящий из всех множеств $\mathfrak{R}_3(G)$, содержащихся в $W(F)$, кроме тех границ F, что делят граф более чем на две части. Ось и границы F мы будем называть соответственно *осью* и *границами* тройного комплекса $\mathcal{C}_F$.

Все непустые части $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_F)$ будем называть *главными*.

Пусть $F = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ — тройной разрез с осью S, $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2, A_3\}$, а части $B_i \in \mathrm{Part}(M_i)$ таковы, что $B_i \subset A_i$ (см. рисунок 10.12а).

Для каждой вершины $x \in S$ степени $d_G(x) = 3$ пусть $\mathrm{N}_G(x) = \{x_1, x_2, x_3\}$, где $x_i \in \mathrm{Int}(A_i)$. Напомним, что тогда M_i состоит из всех рёбер вида xx_i и вершин $y \in S$, имеющих степень более 3, а B_i получается из A_i удалением всех вершин множества S, имеющих степень 3.

Как следует из леммы 10.7, комплекс $\mathcal{C}_F$ состоит из S, всех тривиальных разделяющих множеств, подчиненных S (их не более трех), внутренних множеств тех из разрезов M_1, M_2 и M_3, что являются нетривиальными, и тех границ тройного разреза F, что делят граф G на две части. То есть, граница $\mathrm{Bound}(B_i)$ входит в $\mathcal{C}_F$, если и только если она принадлежит $\mathfrak{R}_3(G)$ и не разделяет часть B_i.

Лемма 10.22. *Пусть F — тройной разрез с осью S. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1) $\{x, x_i\} \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_F)$, *где* $x \in S$, $d_G(x) = 3$ *и* $xx_i \in M_i$.

2) *Если разрез M_i нетривиален, то* $B_i \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_F)$, *в этом случае* $|B_i| \geq 3$.

3) *Пусть разрез M_i тривиален — скажем,* $\mathrm{Int}(B_i) = \{b_i\}$, *но не все вершины множества S имеют степень* 3. *Тогда* $d_G(b_i) = 3$, $B_i \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_F)$. *В этом случае B_i состоит из b_i и всех вершин множества S, имеющих степень более* 3.

4) *Других частей в* $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_F)$ *нет.*

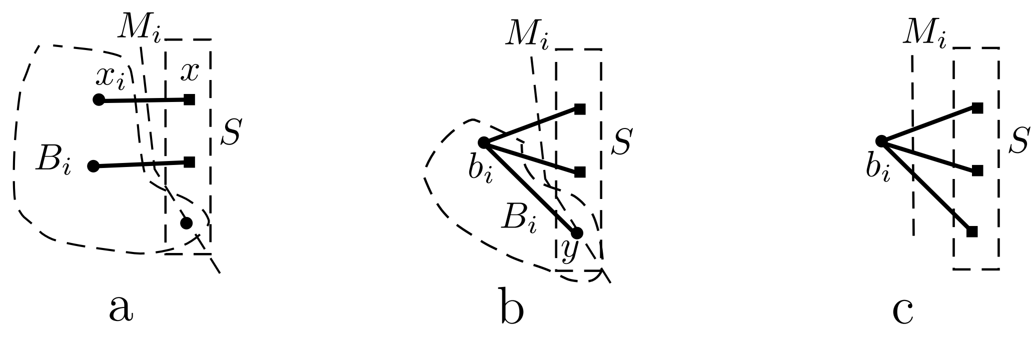


Рис. 10.12: Разбиение графа комплексом тройного разреза.

Доказательство. Начнем с конца. Множество S делит граф на части A_1, A_2 и A_3. Для каждой вершины $x \in S$ степени $d_G(x) = 3$ множество $\mathrm{N}_G(x) \in \mathfrak{R}_3(G)$ зависимо с S и $\{x, x_i\} \in \mathrm{Part}(\{\mathrm{N}_G(x), S\})$. Таким образом, множества комплекса $\mathcal{C}_F$ отделяют друг от друга все части вида $\{x, x_i\}$ (из пункта 1) и части B_1, B_2, B_3 (получаемые из A_1, A_2, A_3, соответственно, удалением всех вершин множества S, имеющих степень 3). Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество перечисленных частей. Несложно понять, что множества комплекса $\mathcal{C}_F$ части из $\mathfrak{M}$ не разделяют. Следовательно, $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_F)$ состоит в точности из тех частей указанных видов, что являются максимальными по включению.

Части $\{x, x_i\}$ всегда являются максимальными по включению.

Если разрез M_i нетривиален, то $T_i = \mathrm{Bound}(B_i)$ состоит из трех вершин, которые вместе не входят в остальные части из $\mathfrak{M}$ (см. рис. 10.12a).

Пусть разрез M_i тривиален, $\mathrm{Int}(B_i) = \{b_i\}$. Тогда B_i в силу сказанного выше состоит из b_i и тех вершин множества S, что имеют в G степень более 3. Если такие вершины есть (см. рисунок 10.12b, пусть y — одна из них), то часть B_i, очевидно, является максимальной по включению (остальные части не содержат b_i вместе с y). Если же все вершины множества S имеют степень 3 (см. рисунок 10.12c), то $B_i = \{b_i\}$ — очевидно, такая часть не является максимальной по включению. □

Замечание 10.16. Таким образом, главные части $\mathrm{Part}(\mathcal{C})_F$ — в точности те из частей B_1, B_2 и B_3, что непусты.

Лемма 10.23. *Пусть $\mathcal{C}_F$ — комплекс тройного разреза, $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_F)$ — главная часть, $T = \mathrm{Bound}(A)$. Тогда существует такая часть $\overline{A} \in \mathrm{Part}(T)$, что $\overline{A} \supset V(\mathcal{C}_F)$, а часть A является объединением всех отличных от $\overline{A}$ частей $\mathrm{Part}(T)$.*

Доказательство. Пусть $A = B_i$, тогда $T = T_i$. Тогда по лемме 10.2

существует часть $\overline{A} \in \mathrm{Part}(T_i)$, содержащая вершины из $W(M_i)$, а объединение остальных частей $\mathrm{Part}(T_i)$ — это B_i. Ось S тройного разреза F лежит в части $\overline{A}$. По лемме 3.2 тогда все остальные части $\mathrm{Part}(S)$ (а значит, и все вершины комплекса F) лежат в $\overline{A}$. $\square$

10.2.2 Комплекс ромашки

Пусть в графе G существует такая ромашка F, что в $\mathrm{Part}(F)$ нет непустых частей. Тогда все вершины графа G являются вершинами ромашки, каждый лепесток F смежен с центром и двумя соседними лепестками. В этом случае все 3-разделяющие множества графа G — это множества ромашки F, а сам граф G является "колесом" (см. определение 7.2). В дальнейшем не будем возвращаться к этому тривиальному случаю и будем считать, что для любой ромашки F в $\mathrm{Part}(F)$ есть непустая часть. Для удобства здесь и далее мы будем считать, что для неособой ромашки $\mathrm{O}(F) = V(F)$.

Определение 10.18. Назовем максимальную невырожденную ромашку F *важной*, если $\mathrm{O}(F)$ не является строгим подмножеством окрестности другой ромашки и $V(F)$ не является подмножеством множества вершин какого-либо тройного разреза.

Следующая лемма покажет, чем важная ромашка отличается от максимальной невырожденной ромашки.

Лемма 10.24. *Пусть $F' = (p'; q'_1, \dots, q'_m)$ — максимальная невырожденная ромашка, не являющаяся важной. Тогда $m = 4$ и лепестки можно занумеровать так, что $M = \{p', q'_1q'_2, q'_4q'_3\}$ — максимальный разрез. Более того, выполнено одно из двух следующих утверждений.*

1° *Существует такой тройной разрез $F = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, что $M = M_i$.*

2° *Существует такая особая ромашка F, что $M = M'_{i,i+1}$.*

Доказательство. Так как ромашка F' не является важной, достаточно рассмотреть следующие два случая.

1. *Существует такой тройной разрез $F = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ с осью S, что $V(F') \subset W(F)$.*
По лемме 10.17, множество, разделяющее $V(F')$, должно делить граф на две части, то есть, S не может быть таким множеством. Значит, $V(F')$ лежит в одной части $\mathrm{Part}(S)$. Пусть, скажем, $V(F') \subset A_1$. Тогда $V(F') \subset W(M_1)$. Из невырожденности F' следует, что $M_1 \in \mathfrak{T}_2(G)$ и $V(F') =$

$W(M_1)$. По лемме 10.13 тогда $m = 4$ и лепестки можно занумеровать так, что $M_1 = \{p', q'_1q'_2, q'_4q'_3\}$. Таким образом, выполнено 1°.

2. *Существует такая максимальная невырожденная ромашка F, что* $\mathrm{O}(F') \subsetneq \mathrm{O}(F)$.
Пусть p — центр F. Если ромашка F — неособая, то по лемме 10.12 любое разделяющее множество, содержащееся в $V(F)$, должно содержать p. Следовательно, p — центр F' и $F = F'$, противоречие. Если F — особая ромашка, то по лемме 10.21 либо F' двойственна к F, либо F' содержится в одном из разрезов $M'_{i,i+1}$. Если ромашки F и F' двойственны, то $\mathrm{O}(F') = \mathrm{O}(F)$, что не противоречит важности ромашки F'. Значит, лепестки F можно занумеровать так, что $V(F') \subset W(M'_{1,2})$. Из невырожденности F' следует, что $M'_{1,2} \in \mathfrak{T}_2(G)$ и $V(F') = W(M'_{1,2})$. По лемме 10.13 тогда $m = 4$ и лепестки можно занумеровать так, что $M'_{1,2} = \{p', q'_1q'_2, q'_4q'_3\}$. Таким образом, выполнено 2°. □

Замечание 10.17. Из леммы 10.24 и описания обосбых ромашек следует, что особая ромашка всегда является важной.

Объектом изучения в этом разделе будет важная ромашка $F = (p; q_1, q_2, \dots, q_m)$. Как было показано выше, возможны два принципиально разных случая: ромашка F может быть особой или неособой.

Определение 10.19. Пусть F — важная ромашка.

1) Если ромашка F — неособая, то *комплекс* $\mathcal{C}_F$ состоит из всех множеств $\mathfrak{R}_3(G)$ на вершинах $V(F)$, кроме тех границ ромашки F, что делят граф более чем на две части. В этом случае *границами комплекса* $\mathcal{C}_F$ мы будем называть границы ромашки, а $V(\mathcal{C}_F) = V(F)$.

2) Если ромашка F — особая, то *комплекс* $\mathcal{C}_F$ состоит из всех множеств $\mathfrak{R}_3(G)$ на вершинах $\mathrm{O}(F)$, кроме кроме тех границ $\mathrm{O}(F)$, что делят граф более чем на две части. В этом случае *границами комплекса* $\mathcal{C}_F$ мы будем называть границы окрестности ромашки, а $V(\mathcal{C}_F) = \mathrm{O}(F)$.

3) В обоих случаях все непустые части $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_F)$ будем называть *главными.*

Замечание 10.18. 1) Если ромашка F — неособая, то по леммам **??** и 10.12 мы имеем $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_F) = \mathrm{Part}(F)$. В комплекс ромашки включены в точности те ее границы, что являются разделяющими множествами и не разбивают частей $\mathrm{Part}(F)$.

2) Пусть F — особая ромашка. В лемме 10.20 перечислены все множества из $\mathfrak{R}_3(G)$, содержащиеся в $\mathrm{O}(F)$. Это множества ромашки F, окрестность центра $\mathrm{N}_G(p)$, внутренние множества разрезов $M'_{i,i+1}$ и границы $\mathrm{O}(F)$. Граница $Q'_{i,i+1}$ входит в $\mathcal{C}_F$, если и только если она является разделяющим множеством и не разделяет часть $G'_{i,i+1}$.

3) Если F и F' — двойственные особые ромашки, то $\mathrm{O}(F) = \mathrm{O}(F')$, а значит, и $\mathcal{C}_F = \mathcal{C}_{F'}$.

Лемма 10.25. *Пусть F — особая ромашка. Тогда* $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_F)$ *состоит из следующих частей:*

1° $G'_{i,i+1}$, *где* $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$;
2° $\{q_i, q_{i+1}\}$, *где* $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) = \varnothing$;
3° $\{p, u_{i,i+1}\}$, *где* $u_{i,i+1} \in \mathrm{N}_G(p)$;
4° $\{p, q_i\}$, *где* $q_i \in \mathrm{N}_G(p)$.

Доказательство. Напомним, что $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}(F)) = \mathrm{Part}(F) = \{G_{i,i+1}\}_{i=1}^{m}$. Множество $\mathrm{N}_G(p)$ отделяет от каждой части $G_{i,i+1}$ центр ромашки p. Поэтому, все указанные в условии леммы множества вершин отделены друг от друга в $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_F)$. Легко видеть, что множества из $\mathcal{C}_F$ не разделяют никакие из перечисленных множеств и все они являются максимальными по включению. □

Замечание 10.19. Если ромашка F — особая, а $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_F)$ — часть, содержащая хотя бы три вершины, то $A = G'_{i,i+1}$, где $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$.

Лемма 10.26. *Пусть F — ромашка, $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_F)$ — главная часть, $T = \mathrm{Bound}(A)$. Тогда существует единственная часть $\overline{A} \in \mathrm{Part}(T)$, содержащая $V(\mathcal{C}_F)$, а часть A является объединением всех отличных от $\overline{A}$ частей* $\mathrm{Part}(T)$.

Доказательство. Если ромашка F — неособая и $A = G_{i,i+1}$, то по следствию 9.3 мы имеем $\overline{A} = G_{i+1,i}$. Если ромашка F — особая и $A = G'_{i,i+1}$, то утверждение следует из леммы 10.2, примененной к разрезу $M'_{i,i+1}$. □

10.2.3 Комплекс разреза

Определение 10.20. 1) Пусть $M \in \mathfrak{T}_3(G)$ — нетривиальный разрез, причем $W(M)$ не содержится в множестве вершин никакого комплекса тройного разреза или комплекса ромашки. Будем называть такой разрез *большим.*

Определим *комплекс большого разреза* $\mathcal{C}_M$ как набор, состоящий из всех множеств из $\mathfrak{R}_3(G)$, содержащихся в $W(M)$, кроме тех его границ, что делят граф более чем на две части.

Границы T_1^M и T_2^M разреза M назовем *границами* комплекса $\mathcal{C}_M$.

2) Пусть $M \in \mathfrak{T}_1(G)$ — максимальный нетривиальный разрез, причем $W(M)$ не содержится в множестве вершин никакого комплекса тройного разреза или комплекса ромашки, а границы M не являются одиночными множествами. Будем называть этот разрез *малым.*

Как нам известно, существует всего два множества из $\mathfrak{R}_3(G)$, содержащихся в $W(M)$ — это границы разреза M. *Комплекс малого разреза* $\mathcal{C}_M$ состоит из этих двух множеств, они же являются *границами* комплекса $\mathcal{C}_M$.

3) Пусть $\mathcal{C}_M$ — комплекс большого или малого разреза. Если часть G_i^M непуста (где $i \in \{1,2\}$), то будем называть эту часть *главной.*

Лемма 10.27. *Пусть M — большой или малый разрез, $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_M)$ — главная часть, $T = \mathrm{Bound}(A)$. Тогда существует единственная часть $\overline{A} \in \mathrm{Part}(T)$, содержащая $V(\mathcal{C}_M)$, а часть A является объединением всех отличных от $\overline{A}$ частей $\mathrm{Part}(T)$.*

Доказательство. Если $A = G_1^M$, то, по лемме 10.2, мы имеем $\overline{A} = \mathrm{O}(G_2^M)$. $\square$

Замечание 10.20. 1) Пусть M — большой разрез. По лемме 10.4 любое множество $R \in \mathcal{C}_M$ содержится в разрезе M (то есть, содержит по одной вершине из каждого входящего в M ребра). Почти все такие множества входят в $\mathcal{C}_M$. А именно, в $\mathcal{C}_M$ входят все внутренние множества разреза M и те из его границ, что делят граф ровно на две части.

2) Пусть M — большой разрез. Тогда $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_M)$ состоит из частей G_1^M и G_2^M, а также малых частей вида $\{x_1, x_2\}$, где $x_1x_2 \in M$. Главные части $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_M)$ — в точности те из G_1^M и G_2^M, что непусты.

3) Разрез $M = \{x_1x_2, y_1y_2, z\} \in \mathfrak{T}_2(G)$ разбивает граф так же, как ромашка $F = (z; x_1, y_1, y_2, x_2)$. Поэтому, комплекс такого разреза нет смысла рассматривать, он является частным случаем комплекса ромашки.

4) Пусть $M = \{a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2\}$ — большой разрез. Как было доказано выше, существует шесть четырехлепестковых ромашек с вершинами из $W(M)$ (это $(b_1; a_1, a_2, c_2, c_1)$ и еще пять аналогичных). Те из них, что являются максимальными — вырожденные.

5) Пусть $M = \{x_1x_2, y, z\}$ — малый разрез. Легко видеть, что

$$\mathrm{Part}(\mathcal{C}_M) = \{G_1^M, G_2^M, \{x_1, x_2, y, z\}\}.$$

Непустую внутренность могут иметь только части G_1^M и G_2^M. Главные части $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_M)$ — в точности те из G_1^M и G_2^M, что непусты.

6) Так как малый разрез не содержится ни в каком тройном разрезе, его граница не может быть осью тройного разреза. Следовательно, каждая из границ малого разреза — неодиночное множество, делящее граф на две части.

7) Пусть M — большой или малый разрез. По лемме 10.16 для любого множества $R \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathcal{C}_M$ существует единственная такая главная часть $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_M)$, что $R \subset \mathrm{O}(A)$ и либо $R = \mathrm{Bound}(A)$, либо $R \cap \mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$.

10.2.4 Комплекс одиночного множества

Определение 10.21. Назовем максимальный разрез $M \in \mathfrak{T}_1(G)$ *полуодиночным*, если $W(M)$ не содержится ни в каком комплексе ромашки, одна из границ M — одиночное множество, а вторая граница M — неодиночное множество, делящее граф на две части.

Замечание 10.21. Полуодиночный разрез не может быть тривиальным, так как тривиальный разрез из $\mathfrak{T}_1(G)$ не может быть максимальным.

If both boundaries of M are single cutsets, we may not consider this cut, it is enough to consider its boundaries separately. If the other boundary of M is a line of a triple cut F then M is contained in F.

Thus, only semi-single cuts remain. We will subordinate each semi-sitgle cut to its single boundary.

При определении комплексов разрезов мы не учли разрезы из $\mathfrak{T}_1(G)$, среди границ которых есть одиночные множества. Пусть M — такой разрез. Если обе границы M одиночные, то такой разрез можно не рассматривать, рассмотрев его границы отдельно друг от друга. Если другая граница M — ось тройного разреза F, то M содержится в F.

Остаются только полуодиночные разрезы. Каждый полуодиночный разрез мы “подчиним” его одиночной границе и рассмотрим вместе с ней.

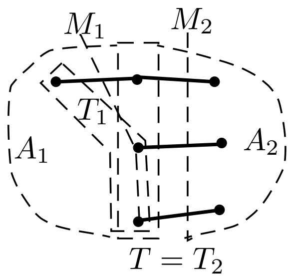


Рис. 10.13: Полуодиночный разрез и комплекс одиночного множества.

Определение 10.22. Пусть $T \in \mathfrak{O}(G)$, а $\mathrm{Part}(T) = \{A_1, \dots, A_n\}$.

1) Предположим, что в $G(A_i)$ есть рёбра, которыми можно дополнить множество T. По лемме 10.1, тогда T можно дополнить всеми этими рёбрами одновременно и получить разрез M_i с границей T. Если M_i — полуодиночный разрез, то обозначим через T_i его границу, отличную от T. Во всех остальных случаях положим $T_i = T$ (см. рисунок 10.13).

2) *Комплекс одиночного множества* $\mathcal{C}_T$ состоит из T и всех множеств T_i.

3) Те из частей $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_T)$, что являются непустыми, назовём *главными.*

4) Если разрез M_i — полуодиночный, то пусть $B_i \in \mathrm{Part}(M_i)$ — часть, чодержащаяся в A_i. В остальных случаях положим $B_i = A_i$.

Замечание 10.22. Если $T_i \neq T$, то $\mathrm{O}(B_i)$ — окрестность B_i как части $\mathrm{Part}(M_i)$.

Лемма 10.28. *Пусть $T \in \mathfrak{O}(G)$.*

1) *Комплекс $\mathcal{C}_T$ состоит из всех множеств $\mathfrak{R}_3(G)$, содержащихся в $V(\mathcal{C}_T)$. Все эти множества попарно независимы.*

2) $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_T)$ *состоит из частей $B_1, \dots, B_n$ и множеств $W(M_i)$ для всех полуодиночных разрезов из $M_1, \dots, M_n$.*

Доказательство. 1) Пусть $R \subset V(\mathcal{C}_T)$, $R \in \mathfrak{R}_3(G)$ и $R \neq T$. Тогда R независимо с T, а значит, содержится ровно в одной из частей A_i. Следовательно, $T = T_i$.

2) Очевидно, так как множества из $\mathcal{C}_T$ попарно независимы, а каждое отличное от T множество T_i делит граф на две части. □

10.2.5 Тривиальные комплексы

Остается последний вид комплекса — *тривиальный.*

Определение 10.23. 1) Пусть $T = \{x, y, z\}$ — неодиночное тривиальное множество (то есть, $T = \mathrm{N}_G(a)$, где $a \in V(G)$ и $d_G(a) = 3$), не вошедшее ни в один из определенных ранее комплексов. Тогда $\mathcal{C}_a = \{T\}$ — *тривиальный комплекс.*

2) Понятно, что $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_a)$ состоит из двух частей: $B = V(G - a)$ и $\{a, x, y, z\}$. Единственная *главная* часть — это B, определим ее *окрестность* как $\mathrm{O}(B) = V(G)$ (то есть, как окрестность части разбиения графа тривиальным разрезом $\{xa, ya, za\}$).

Замечание 10.23. 1) Возможно, правильнее было бы назвать тривиальный комплекс $\mathcal{C}_a$ комплексом тривиального разреза $\{xa, ya, za\}$ — окрестность единственной главной части определена как окрестность части $\mathrm{Part}(\{xa, ya, za\})$. В дальнейшем, это вызывет немало сложностей при работе, так как вторая граница этого тривиального разреза — вершина a, которая не является разделяющим множеством и не может быть включена в комплекс.

2) Часть $\{a, x, y, z\} \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_a)$ непуста. Однако, так как $T = \{x, y, z\}$ неодиночно, существует зависимое с T множество $S \in \mathfrak{R}_3(G)$. Тогда

$S \ni a$ разделяет $T = \{x, y, z\}$, а значит, часть $\{a, x, y, z\}$ будет разбита в $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$ на пустые части. Поэтому, мы не считаем эту часть главной частью $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_a)$.

3) Очевидно, любое множество $S \in \mathfrak{R}_3(G)$ лежит в окрестности единственной главной части $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_a)$.

10.2.6 Все множества входят в комплексы

Теорема 10.2. *Каждое множество $T \in \mathfrak{R}_3(G)$ входит хотя бы в один из определенных выше комплексов (а именно, в комплекс ромашки, тройного, большого или малого разреза, в комплекс одиночного множества или тривиальный комплекс).*

Доказательство. Если множество T — одиночное, оно входит в комплекс одиночного множества. Если множество T — тривиальное, то T образует тривиальный комплекс или входит в другие комплексы.

Далее пусть множество T — неодиночное и нетривиальное. Тогда существует множество $S \in \mathfrak{R}_3(G)$, зависимое с T. Если одно из множеств S или T делит граф более чем на две части, то другое множество является тривиальным и оба они входят в комплекс тройного разреза.

Пусть каждое из множеств S и T делят граф на две части. Если $S \cap T \neq \varnothing$, то эти два множества образуют ромашку, а значит, входят в комплекс ромашки, большого или тройного разреза.

Наконец, пусть $S \cap T = \varnothing$. Тогда по леммам 10.2 и 10.1 множество T дополняется до разреза $M \in \mathfrak{T}_1$. Так как T — нетривиальное, то разрез M — нетривиальный. Следовательно, T входит в комплекс разреза (тройного, большого или малого), комплекс одиночного множества или комплекс ромашки. $\square$

Лемма 10.29. *Пусть M — полуодиночный разрез, а его граница T — одиночное множество. Тогда $W(M)$ содержится в множестве вершин ровно одного комплекса — комплекса одиночного множества $\mathcal{C}_T$.*

Доказательство. По определению комплекса одиночного множества $W(M) \subset V(\mathcal{C}_T)$. Очевидно, $W(M)$ не может содержаться в множестве вершин другого одиночного комплекса, а также никакого тривиального комплекса или комплекса малого разреза.

Так как полуодиночный разрез M максимален, $W(M)$ не содержится в множестве вершин никакого большого разреза. По определению, $W(M)$ не содержится ни в каком комплексе ромашки.

Предположим, что $W(M) \subset V(\mathcal{C}_F)$, где $F = \{M_1, M_2, M_3\}$ — тройной разрез с осью S. Так как ни одна из границ M не может быть неодиночным множеством S, делящем граф на три части, то M не совпадает ни с одним из разрезов M_1, M_2 и M_3. В силу максимальности, тогда M не может содежаться ни в одном из этих разрезов.

Итак, $T \neq S$ и эти множества независимы. Поэтому, можно считать, что $T \subset A_1 \in \mathrm{Part}(S)$. Так как $W(M) \not\subset W(M_1)$ и $W(M) \subset W(F)$, вторая граница T' разреза M не лежит в A_1, а значит, зависима с S. Следовательно, T тривиально. Противоречие с замечанием 10.21. □

10.2.7 Окрестность части разбиения графа нетривиальным комплексом

Определение 10.24. Пусть $\mathcal{C}$ — комплекс, $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C})$ — главная часть. Будем использовать обозначение $R_A = \mathrm{Bound}(A)$.

Лемма 10.30. *Пусть комплекс $\mathcal{C}$ — нетривиальный, $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C})$ — главная часть. Тогда выполнено одно из двух утверждений.*

1° $\mathcal{C} = \mathcal{C}_T$ — комплекс одиночного множества и $R_A = T$.

2° Существует часть $\overline{A} \in \mathrm{Part}(R_A)$, содержащая $V(\mathcal{C})$. Часть A является объединением всех отличных от $\overline{A}$ частей $\mathrm{Part}(T)$.

Доказательство. Если $\mathcal{C}$ — комплекс тройного разреза, то утверждение 2° доказано в лемме 10.23. Если $\mathcal{C}$ — комплекс большого или малого разреза, то утверждение 2° доказано в лемме 10.27. Если $\mathcal{C}$ — комплекс ромашки, то утверждение 2° доказано в лемме 10.26.

Остается случай, когда $\mathcal{C} = \mathcal{C}_T$ — комплекс одиночного множества. Если $R_A = T$, то выполнено утверждение 1°. Пусть $R_A \neq T$. Тогда M_A — полуодиночный разрез и $A \in \mathrm{Part}(M_A)$. По лемме 10.2, существует такая часть $\overline{A} \in \mathrm{Part}(R_A)$, что $\overline{A} \supset W(M_A)$, а A — объединение всех отличных от $\overline{A}$ частей $\mathrm{Part}(R_A)$. Следовательно, $\overline{A} \supset T$. Тогда все не содержащие A части $\mathrm{Part}(T)$ по лемме 3.2 также лежат в $\overline{A}$, а значит, $V(\mathcal{C}) \subset \overline{A}$. □

Определение 10.25. Пусть комплекс $\mathcal{C}$ — нетривиальный, $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C})$ — главная часть.

1) Если $\mathcal{C} = \mathcal{C}_T$ — комплекс одиночного множества и $R_A = T$, то положим $M_A = T_A = T$ и определим окрестность этой части как $\mathrm{O}(A) = A$.

2) Во всех остальных случаях по лемме 10.30 существует часть $\overline{A} \in \mathrm{Part}(R_A)$, содержащая $V(\mathcal{C})$. В этом случае *окрестность* $\mathrm{O}(A)$ строится следующим образом: множество R_A дополняется до *граничного разреза* M_A части A всеми возможными ребрами, лежащими в $\overline{A}$, а $\mathrm{O}(A) = A \cup W(M_A)$ (если таких рёбер нет, то $M_A = R_A$ и $\mathrm{O}(A) = A$).

Если $M_A \neq R_A$, то одна из границ разреза M_A — это R_A, а другая — обозначим ее через T_A — *внешняя граница* части A (см. рисунок 10.14). Если $M_A = R_A$, то положим $T_A = R_A$.

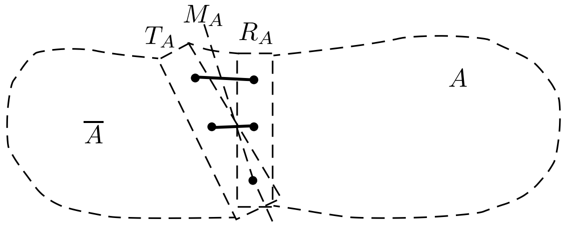


Рис. 10.14: Граничный разрез и внешняя граница части A.

Замечание 10.24. 1) Так как комплекс $\mathcal{C}$ — нетривиальный, разрез M_A не может быть тривиальным, то есть, $|T_A| \geq 3$.

2) Если разрез M_A — вырожденный, то множество T_A не является разделяющим. В этом случае мы будем работать с T_A как с разделяющим множеством: положим $\mathrm{Part}(T_A) = \{V(G)\}$, границей этой части будем считать T_A, а внутренностью — $V(G) \setminus T_A$.

3) Пусть $T_A \notin \mathfrak{R}_3(G)$ и $S \in \mathfrak{R}_3(G)$. Из данного выше определения следует, что T_A не разделяет S. С другой стороны, по замечанию 10.4 тогда вершины множества T_A попарно смежны, а значит, S не разделяет T_A. Таким образом, можно считать, что T_A независимо со всеми множествами из $\mathfrak{R}_3(G)$.

Замечание 10.25. 1) Если M_A — разрез (то есть, $M_A \neq R_A$), то $\mathrm{O}(A)$ — окрестность A как части $\mathrm{Part}(M_A)$. В этом случае $\mathrm{O}(A) \in \mathrm{Part}(T_A)$ (по лемме 10.2) и $\mathrm{O}(A) \setminus A \subset T_A$.

2) Если $\mathcal{C}$ — комплекс большого или малого разреза M, а $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C})$, то $M_A = M$.

3) Пусть $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ — комплексы, а главные части $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_1)$ и $B \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_2)$ таковы, что $B \subset A$.

Тогда $\mathrm{O}(B) \subset \mathrm{O}(A)$. (В случае, если комплекс $\mathcal{C}_1$ — тривиальный, то $\mathrm{O}(A) = V(G)$. В остальных случаях утверждение следует из определения 10.25.) Кроме того, из леммы 3.1 следует, что $\mathrm{Int}(B) \subset \mathrm{Int}(A)$.

Лемма 10.31. *Пусть $\mathcal{C}$ — нетривиальный комплекс, а $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C})$ — главная часть. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1) $W(M_A) \subset V(\mathcal{C})$.

2) *Все множества из $\mathfrak{R}_3(G)$, содержащиеся в M_A и отличные от его границ, входят в $\mathcal{C}$. Если граница разреза M_A не входит в $\mathcal{C}$, то она является границей комплекса $\mathcal{C}$ и делит граф более чем на две части.*

Доказательство. 1) Случай $M_A = R_A$ очевиден. Далее считаем, что M_A — разрез. Если $\mathcal{C}$ — комплекс разреза M, то $M = M_A$ и утверждение доказано.

Пусть $\mathcal{C}$ — комплекс тройного разреза F. В обозначениях раздела 10.2.1 будем считать, что $A = B_i$. Тогда $M_A = M_i$ и $W(M_i) \subset W(F) \subset V(\mathcal{C})$.

Пусть $\mathcal{C}$ — комплекс одиночного множества. Тогда M_A — полуодиночный разрез и $W(M_A) \subset V(\mathcal{C})$ по определению.

Наконец, пусть $\mathcal{C}$ — комплекс ромашки F. Если F — неособая, то можно считать, что $A = G_{i,i+1}$. По лемме 10.15 тогда $M_A = M_{i,i+1}$. Если F — особая, то можно считать, что $A = G'_{i,i+1}$. Тогда из лемм 10.15 и 10.19 следует, что $M_A = M'_{i,i+1}$. В обоих случаях, $W(M_A) \subset V(\mathcal{C})$.

2) Прямое следствие пункта 1 и определений комплексов. □

Лемма 10.32. *Пусть $\mathcal{C}$ — комплекс, а $T \in \mathfrak{R}_3(G) \backslash \mathcal{C}$. Тогда существует единственная такая главная часть $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C})$, что $T \subset \mathrm{O}(A)$. Более того, либо $T = R_A$, либо T пересекает $\mathrm{Int}(A)$. Внутренностей других главных частей $\mathrm{Part}(\mathcal{C})$ множество T не пересекает.*

Доказательство. Если $\mathcal{C}$ — тривиальный комплекс, то существует всего одна главная часть $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C})$ и $\mathrm{O}(A) = V(G)$, поэтому, $T \subset \mathrm{O}(A)$. Далее пусть комплекс $\mathcal{C}$ — нетривиальный.

Если T не пересекает внутренностей главных частей $\mathrm{Part}(\mathcal{C})$, то $T \subset V(\mathcal{C})$. Так как $T \notin \mathcal{C}$, из определений комплексов следует, что T — граница части $\mathrm{Part}(\mathcal{C})$ и такая часть ровно одна, что и требовалось доказать.

Далее считаем, что $T \not\subset V(\mathcal{C})$. Предположим, что мы доказали существование такой части A, что $TY \subset \mathrm{O}(A)$. Тогда $T \cap \mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$. Окрестности других главных частей $\mathrm{Part}(\mathcal{C})$ не пересекаются с $\mathrm{Int}(A)$ и, следовательно, не содержат T. И наоборот, внутренности других главных частей $\mathrm{Part}(\mathcal{C})$ не пересекаются с $\mathrm{O}(A)$ и, следовательно, не пересекают T. Таким образом, остается лишь доказать, что существует часть $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C})$, окрестность которой содержит T. Для этого рассмотрим несколько случаев, чем может быть комплекс $\mathcal{C}$.

1. *$\mathcal{C} = \mathcal{C}_M$ — комплекс большого или малого разреза M.*
Тогда по лемме 10.16 множество T лежит в окрестности одной из частей $\mathrm{Part}(M)$ и эта часть нам подходит в качестве A.

2. *$\mathcal{C} = \mathcal{C}_F$ — комплекс тройного разреза F.*
Пусть S — ось F. Тогда T независимо с S, а значит, можно считать, что T лежит в части $A_1 \in \mathrm{Part}(S)$. Тогда M_1 — разрез, $B_1 \in \mathrm{Part}(\mathcal{C})$ и $T \subset A_1 = \mathrm{O}(B_1)$. Очевидно, часть $A = B_1$ нам подходит.

3. *$\mathcal{C} = \mathcal{C}_S$ — комплекс одиночного множества.*
Так как T независимо с S, существует такая часть $B \in \mathrm{Part}(S)$, что $T \subset B$. Ровно одна часть $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C})$ лежит в B, более того, тогда $\mathrm{O}(A) = B$. Часть A нам подходит.

4. *$\mathcal{C} = \mathcal{C}_F$ — комплекс ромашки $F = (p; q_1, \dots, q_m)$.*

Как сказано выше, можно считать, что существует такая часть $H \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_F)$, что $T \cap \mathrm{Int}(H) \neq \varnothing$. Докажем, что $R \subset \mathrm{O}(H)$. Если T независимо с R_H, то доказываемое утверждение очевидно. Далее пусть T зависимо с R_H. Рассмотрим два случая.

4.1. *Ромашка F — неособая.*
В этом случае $H = G_{i,i+1}$, $T \cap \mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$ и T разделяет $Q_{i,i+1} = \{q_i, q_{i+1}, p\}$. Тогда T разделяет $V(F)$, а значит, по лемме 10.17 множество T отделяет одну или две вершины из $V(F)$ от остальных. Если таких вершин две, то по пункту 2 леммы 10.17 это два соседних лепестка, (причем в нашем случае это могут быть только q_i и q_{i+1}) и $T \subset \mathrm{O}(G_{i,i+1})$. Если T отделяет одну вершину из $V(F)$ от остальных, то по замечанию 10.14 эта вершина — лепесток ромашки (иначе ромашка — особая). Теперь из леммы 10.18 следует, что отрезаемый лепесток — это q_i или q_{i+1}, а $T \subset \mathrm{O}(G_{i,i+1})$. Часть $A = G_{i,i+1}$ нам подходит.

4.2. *Ромашка F — особая.*
В этом случае $H = G'_{i,i+1}$, $T \cap \mathrm{Int}(G'_{i,i+1}) \neq \varnothing$ и T разделяет $Q'_{i,i+1} = \{q_i, q_{i+1}, u_{i,i+1}\}$. Если T разделяет $V(F)$, доказательство аналогично предыдущему пункту. Действительно, если T отделяет центр p от остальных вершин $V(F)$, мы имеем $T = \mathrm{N}_G(p) \in \mathcal{C}_F$, противоречие. В случае, когда T отделяет лепестки q_i, q_{i+1} от остальных вершин $V(F)$, по пункту 2 леммы 10.17 мы получим, что $T = \{q_{i-1}, q_{i+2}, u_{i,i+1}\} \in \mathcal{C}_F$, противоречие. Наконец, если T отделяет один лепесток от остальных вершин $V(F)$, по лемме 10.18 это q_i или q_{i+1} и мы имеем $T \subset \mathrm{O}(G'_{i,i+1})$.

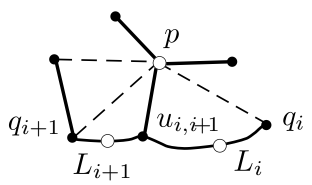


Рис. 10.15: Вершины множества T (помечены белым) отделяют $u_{i,i+1}$ от вершин особой ромашки.

Остается случай, когда T не разделяет $V(F)$. Тогда T отделяет $u_{i,i+1}$ от $V(F)$. Следовательно, $T \ni p$. По теореме Менгера в двусвязном графе $G - p$ существуют $q_i u_{i,i+1}$-путь L_i и $q_{i+1} u_{i,i+1}$-путь L_{i+1} без общих внутренних вершин (см. рисунок 10.15). Очевидно, $\mathrm{Int}(L_i) \cup \mathrm{Int}(L_{i+1}) \subset \mathrm{Int}(G'_{i,i+1})$. Множество T должно содержать по вершине из $\mathrm{Int}(L_i)$ и $\mathrm{Int}(L_{i+1})$. Следовательно, $T \subset \mathrm{O}(G'_{i,i+1})$. Часть $A = G'_{i,i+1}$ нам подходит. $\square$

10.3 Взаимное расположение комплексов

10.3.1 Часть, к которой относится комплекс

Определение 10.26. Пусть $\mathcal{C}$ — комплекс.

1) Будем говорить, что множество $T \in \mathfrak{R}_3(G)\setminus\mathcal{C}$ *относится* к главной части $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C})$, если $T \subset \mathrm{O}(A)$ и либо $T = R_A$, либо $T \cap \mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$.

2) Будем говорить, что комплекс $\mathcal{C}'$ (отличный от $\mathcal{C}$) *относится* к главной части $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C})$, если $V(\mathcal{C}') \subset \mathrm{O}(A)$ и все множества из $\mathcal{C}' \setminus \mathcal{C}$ относятся к A.

Следствие 10.10. *Пусть $\mathcal{C}$ — комплекс, $T \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathcal{C}$.*

1) *Множество T относится ровно к одной главной части $\mathrm{Part}(\mathcal{C})$ и не пересекает внутренностей других главных частей $\mathrm{Part}(\mathcal{C})$.*

2) *Если главная часть $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C})$ такова, что $T \cap \mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$, то T относится к части A.*

Доказательство. 1) Прямое следствие леммы 10.32.

2) Прямое следствие пункта 1. □

Лемма 10.33. *Пусть $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ — комплексы, причём $|\mathcal{C}_2| \geq 2$. Пусть главная часть $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_1)$ такова, что $V(\mathcal{C}_2) \subset \mathrm{O}(A)$. Тогда комплекс $\mathcal{C}_2$ относится к части A.*

Доказательство. Пусть $S \in \mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{C}_1$. Нам нужно доказать, что множество S относится к части A. Если $S \cap \mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$, то S относится к части A по следствию 10.10. Пусть $S \cap \mathrm{Int}(A) = \varnothing$. Тогда S содержится в граничном разрезе M_A части A. По лемме 10.31 тогда S — граница разреза M_A и комплекса $\mathcal{C}_1$. Граница R_A, очевидно, относится к части A.

Остается рассмотреть границу T_A в случае, когда $T_A \neq R_A$, $T_A \in \mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{C}_1$ и T_A — граница комплекса $\mathcal{C}_1$. Тогда $|\mathrm{Part}(T_A)| \geq 3$. Множество T_A независимо со всеми множествами из $\mathfrak{R}_3(G)$, лежащими в $\mathrm{O}(A)$, а значит, и со всеми множествами из $\mathcal{C}_2$. Если T_A — граница комплекса $\mathcal{C}_2$, то в силу $|\mathrm{Part}(T_A)| \geq 3$ мы имеем $T_A \notin \mathcal{C}_2$, противоречие.

Остается случай, когда T_A независимо со всеми множествами комплекса $\mathcal{C}_2$, но не является его границей. Это возможно, только если $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_{T_A}$ — комплекс одиночного множества. Из $V(\mathcal{C}_2) \subset \mathrm{O}(A)$, $|\mathcal{C}_2| \geq 2$ и определения комплекса одиночного множества следует, что $\mathcal{C}_2 = \{T_A, R_A\}$, а M_A — полуодиночный разрез. Тогда из леммы 10.29 и $W(M_A) \subset V(\mathcal{C}_1)$ следует, что $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$, противоречие. □

Лемма 10.34. 1) *Пусть комплекс $\mathcal{C}$ и важная ромашка F таковы, что $V(F) \subset V(\mathcal{C})$. Тогда $\mathcal{C}$ — комплекс ромашки F.*

2) *Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ — комплексы, $|\mathcal{C}_2| \geq 2$. Тогда $V(\mathcal{C}_2) \not\subset V(\mathcal{C}_1)$.*

Доказательство. 1) В этом случае $\mathcal{C}$ не может быть ни комплексом малого разреза, ни комплексом одиночного множества. В силу невырожденности F, $\mathcal{C}$ не может быть комплексом большого разреза. По определению важной ромашки, $\mathcal{C}$ не может быть комплексом тройного разреза.

Остается случай, когда $\mathcal{C}$ — комплекс ромашки F' с центром p. Прелположим, что $F \neq F'$. Если ромашка F' — неособая, то по лемме 10.12 любое разделяющее множество, содержащееся в $V(\mathcal{C}) = V(F')$, должно содержать p, следовательно, p — центр F и $F = F'$.

Пусть F' — особая ромашка. Если F и F' двойственны, то $\mathrm{O}(F') = \mathrm{O}(F)$, а значит, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_F$, что и требовалось доказать. Остается случай, когда ромашки F и F' не двойственны. Тогда по лемме 10.21 ромашка F содержится в одном разрезов $M'_{i,i+1}$ особой ромашки F'. В этом случае ромашка F имеет 4 лепестка и не может быть особой: в разбиении графа особой ромашкой с 4 лепестками должно быть две соседних непустых части (см. классификацию особых ромашек и рисунки 10.10c и 10.11a), в то время как в разбиении графа ромашкой, содержащейся в разрезе, не может быть двух соседних непустых частей. Значит, $\mathrm{O}(F) = V(F) \subsetneq \mathrm{O}(F')$, что противоречит важности ромашки F.

2) В случае, когда $|\mathcal{C}_1| = 1$, утверждение очевидно. Далее мы будем считать, что $|\mathcal{C}_1| > 1$. Рассмотрим несколько случаев, чем может быть комплекс $\mathcal{C}_2$.

a. $\mathcal{C}_2$ *— комплекс большого или малого разреза.*
По определению, $V(\mathcal{C}_2)$ не может быть подмножеством множества вершин комплекса ромашки или комплекса тройного разреза. Из определения комплекса одиночного множества следует, что $V(\mathcal{C}_2)$ не может быть подмножеством множества вершин такого комплекса. Также $V(\mathcal{C}_2)$ не может быть подмножеством множества вершин комплекса другого большого или малого разреза.

b. $\mathcal{C}_2$ *— комплекс тройного разреза F с осью S.*
Предположим, что $V(\mathcal{C}_2) \subset V(\mathcal{C}_1)$. Тогда $S \subset V(\mathcal{C}_1)$. Докажем, что S — граница комплекса $\mathcal{C}_1$. В самом деле, если это не так, то $S \in \mathcal{C}_1$. Ни комплекс большого разреза, ни комплекс ромашки не содержит множеств, делящих граф на 3 части. Комплекс одиночного множества не содержит неодиночного множества, делящего граф на три части. Остается случай, когда $\mathcal{C}_1$ — комплекс тройного разреза с осью S'. Но тогда $S' \neq S$, а других множеств, делящих граф на 3 части, $\mathcal{C}_1$ не содержит.

Итак, $S = \mathrm{Bound}(A)$, где $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_1)$. Тогда одна из частей $\mathrm{Part}(S)$ (пусть это A_1) лежит в A и $\mathrm{Int}(A_1) \subset \mathrm{Int}(A)$. Пусть $a \in S$ — вершина степени 3, а $a_1 \in \mathrm{Int}(A_1) \cap \mathrm{N}_G(a)$. Тогда $a_1 \in \mathrm{Int}(A)$, а значит, $a_1 \notin V(\mathcal{C}_1)$. Однако, $a_1 \in V(\mathcal{C}_2)$, противоречие.

c. $\mathcal{C}_2$ *— комплекс важной ромашки* F*.*
По пункту 1, тогда $\mathcal{C}_1$ — также комплекс важной ромашки F, противоречие.

d. $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_T$ *— комплекс одиночного множества.*
Так как $|\mathcal{C}_T| \geq 2$, мы имеем $V(\mathcal{C}_T) \supset W(M)$ для некоторого полуодиночного разреза M. По лемме 10.29, $W(M) \not\subset V(\mathcal{C}_1)$. □

Теорема 10.3. *Пусть* $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ *— два комплекса. Тогда существует единственная такая главная часть* $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_1)$*, что* $\mathcal{C}_2$ *относится к* A*.*

Доказательство. Случай, когда $\mathcal{C}_2$ состоит из одного множества, следует из следствия 10.10. Далее считаем, что $|\mathcal{C}_2| \geq 2$. По лемме 10.34 существует вершина $a \in V(\mathcal{C}_2) \setminus V(\mathcal{C}_1)$. Не умаляя общности множно считать, что $a \in \mathrm{Int}(A)$, $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_1)$. Случай, когда комплекс $\mathcal{C}_1$ — тривиальный, очевиден. В остальных случаях все непустые части $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_1)$ — главные, а значит, часть A — главная. В силу следствия 10.10 комплекс $\mathcal{C}_2$ может относиться только к части A.

По лемме 10.33 достаточно доказать, существует такая часть $A' \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_1)$, что $V(\mathcal{C}_2) \subset \mathrm{O}(A')$. Для этого разберем несколько случаев, чем является комплекс $\mathcal{C}_2$. В некоторых случаях мы будем выбирать $A' = A$, но иногда часть A' будет выбираться из других соображений (хотя в результате, разумеется, окажется, что $A' = A$).

1. $\mathcal{C}_2$ *— комплекс малого разреза* $M = \{x_1x_2, y, z\}$*.*
Тогда $T_1^M = \{x_1, y, z\}$, $T_2^M = \{x_2, y, z\}$. Если $a \in \{y, z\}$, то $T_1^M \cap \mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$ и $T_2^M \cap \mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$, откуда в силу следствия 10.10 следует, что T_1^M и T_2^M относятся к A. Пусть $x_1 = a \in \mathrm{Int}(A)$ (случай $x_2 = a$ аналогичен). Тогда по следствию 10.10 множество T_1^M относится к части A, а значит, $T_1^M \subset \mathrm{O}(A)$. Из $x_1 \in \mathrm{Int}(A)$ следует, что $x_2 \in A$, а значит, $V(\mathcal{C}_2) \subset \mathrm{O}(A)$.

2. $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_T$ *— комплекс одиночного множества.*
Одиночное множество T лежит в одной из частей $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_1)$ — пусть, скажем, $T \subset A'$. Если $T \neq R_{A'}$, то $T \cap \mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$ и, аналогично пункту 1, вторая граница любого полуодиночного разреза M_i лежит в $\mathrm{O}(A')$, откуда $V(\mathcal{C}_2) \subset \mathrm{O}(A')$.

Пусть $T = R_{A'}$ — граница комплекса $\mathcal{C}_1$. Так как $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_T$, по лемме 10.30 существует такая часть $\overline{A'} \in \mathrm{Part}(T)$, что $V(\mathcal{C}_1) \subset \overline{A'}$, а A' — объединение всех отличных от $\overline{A'}$ частей $\mathrm{Part}(T)$. Тогда A' содержит все вершины из $V(\mathcal{C}_T)$, кроме тех, что лежат в $\overline{A'}$. Таким образом, если $V(\mathcal{C}_T) \not\subset A'$, то разрез $M_{A'}$, полученный из T дополнением всеми возможными рёбрами, концы которых лежат в $\mathrm{Int}(\overline{A'})$ — полуодиночный разрез, входящий в комплекс $\mathcal{C}_T$. Однако, по лемме 10.31 тогда $W(M_{A'}) \subset V(\mathcal{C}_1)$, что противоречит лемме 10.29.

3. $\mathcal{C}_2$ *— комплекс большого разреза* $M = \{x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2\}$.
Не умаляя общности будем считать, что $a = x_1 \in \mathrm{Int}(A)$. Тогда все множества комплекса $\mathcal{C}_2$, содержащие x_1, пересекают $\mathrm{Int}(A)$, а значит, относятся к A и содержатся в $\mathrm{O}(A)$. Из $x_1 \in \mathrm{Int}(A)$ следует, что $x_2 \in A$. Таким образом, $V(\mathcal{C}_2) \subset \mathrm{O}(A)$.

4. $\mathcal{C}_2$ *— комплекс тройного разреза* $F = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ *с осью* S.
По лемме 10.32 существует такая главная часть $A' \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_1)$, что $S \subset \mathrm{O}(A')$, причем при $S \not\subset A'$ множества S и $R_{A'}$ зависимы.

Предположим, что S и $R_{A'}$ зависимы. Тогда $T = R_{A'}$ — тривиальное множество. Пусть $T = \mathrm{N}_G(a)$. Тогда $\mathrm{Part}(T) = \{B, B'\}$, где $B = \{a\} \cup \mathrm{N}_G(a)$. Пусть $S = \{a, c, c'\}$. Предположим, что $A' = B$. Тогда из $S \subset \mathrm{O}(A')$ следует, что $c, c' \in \mathrm{O}(A')$, то есть, $T = R_{A'}$ дополняется до граничного разреза $M_{A'}$ рёбрами xc и $x'c'$, где $x, x' \in T$ — различные вершины (см. рисунок 10.16a). Пусть $A_x \in \mathrm{Part}(S)$ — такая часть, что $x \in \mathrm{Int}(A_x)$. По лемме 3.7 тогда $U = A_x \cap B' \in \mathrm{Part}(\{S, T\})$ и $\mathrm{Bound}(U) = \{c, c', x\}$. По лемме 10.1 вершина x смежна ровно с одной вершиной части U — с $c \in \mathrm{Bound}(U)$. Если $\mathrm{Int}(U) \neq \varnothing$, то x по лемме 3.1 должна быть смежна с вершиной из $\mathrm{Int}(U)$, что не так. Следовательно, $\mathrm{Int}(U) = \varnothing$, откуда $\mathrm{Int}(A_x) = \{x\}$. Однако, c' по лемме 3.1 должна быть смежна хотя бы с одной вершиной из $\mathrm{Int}(A_x)$, а значит, $c'x \in E(G)$ — противоречие с доказанным выше. Следовательно, $A' = B' = V(G) \setminus \{a\}$. Из $a \in S \subset \mathrm{O}(A')$ следует, что $\mathrm{O}(A') = V(G)$ — очевидно, это множество содержит $V(\mathcal{C}_2)$.

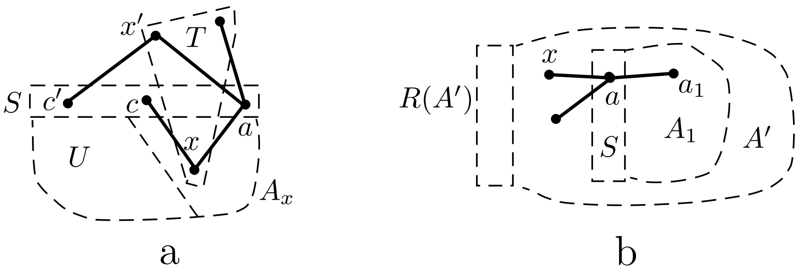


Рис. 10.16: Ось S комплекса тройного разреза и множество $R_{A'}$.

Остается рассмотреть случай, когда S и $R_{A'}$ независимы и, следовательно, $S \subset A'$. По лемме 3.2 существует такая часть $A_1 \in \mathrm{Part}(S)$, что $A_1 \subset A'$ и $\mathrm{Int}(A_1) \subset \mathrm{Int}(A')$. Пусть $x \in V(\mathcal{C}_2) \setminus S$. Тогда существует такая вершина $a \in S$, что $d_G(a) = 3$ и $x \in T = \mathrm{N}_G(a)$ (см. рисунок 10.16b). Отметим, что существует вершина $a_1 \in T \cap \mathrm{Int}(A_1) \subset \mathrm{Int}(A')$. По следствию 10.10, T относится к части A' и $x \in T \subset \mathrm{O}(A')$.

5. $\mathcal{C}_2$ *— комплекс ромашки* $F = (p; q_1, \dots, q_m)$.
В этом случае по пункту 1 леммы 10.34 одна из вершин $a \in V(F)$ не лежит в $V(\mathcal{C}_1)$. Как и выше, пусть $a \in \mathrm{Int}(A)$, $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_1)$. Нам достаточно доказать, что $V(\mathcal{C}_2) \subset \mathrm{O}(A)$.

Сначала докажем, что $V(F) \subset \mathrm{O}(A)$. Если $a = p$, то, так как все множества ромашки F содержат p, все они относятся к части A, следовательно, $V(F) \subset \mathrm{O}(A)$. Далее пусть a — лепесток ромашки (скажем, $a = q_2$). Если множество $Q_{2,i}$ — разделяющее, то оно относится к части A (так как содержит $q_2 = a$). Так как при $i \in \{4, \dots, m\}$ множества $Q_{2,i}$ — разделяющие, получаем $p, q_4, \dots, q_m \in \mathrm{O}(A)$. Если $Q_{1,2} \in \mathfrak{R}_3(G)$, то и $q_1 \in \mathrm{O}(A)$. Если же $Q_{1,2} \notin \mathfrak{R}_3(G)$, то часть $G_{1,2} \in \mathrm{Part}(F)$ — пустая, а значит, $q_1q_2 \in E(G)$, откуда следует, что $q_1 \in A$. Аналогично для лепестка q_3.

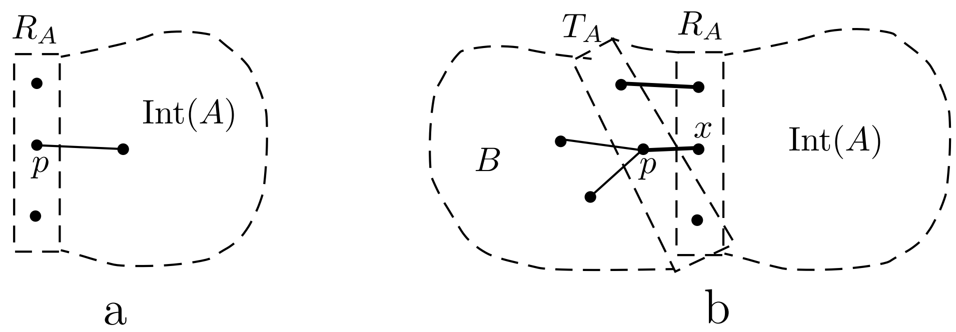


Рис. 10.17: Окрестность центра особой ромашки.

В случае, когда ромашка F — неособая, утверждение доказано. Пусть ромашка F — особая. В этом случае нужно доказать, что $\mathrm{N}_G(p) \subset \mathrm{O}(A)$. Если $p \in \mathrm{Int}(A)$, то $\mathrm{N}_G(p) \subset A$. Если $p \in R_A$, то вершина p смежна хотя бы с одной вершиной из $\mathrm{Int}(A)$, то есть, $\mathrm{N}_G(p) \cap \mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$ (см. рисунок 10.17a), а значит, $\mathrm{N}_G(p)$ относится к части A и $\mathrm{N}_G(p) \subset \mathrm{O}(A)$, что и требовалось доказать.

Остается случай, когда $p \in \mathrm{O}(A) \setminus A$. В этом случае $px \in M_A$, где $x \in R_A$ и $p \in T_A$. По замечанию 10.25 в рассматриваемом случае $\mathrm{O}(A) \in \mathrm{Part}(T_A)$. Таким образом, вершина p смежна только с одной вершиной из $\mathrm{Int}(\mathrm{O}(A))$ — с x. Остальные две вершины из $\mathrm{N}_G(p)$ лежат в $B = V(G) \setminus \mathrm{Int}(\mathrm{O}(A))$ (см. рисунок 10.17b). Так как $V(F) \subset \mathrm{O}(A)$, все множества из $\mathfrak{R}(F)$ независимы с T_A. Поэтому, существует такая часть $G_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(F)$, что $B \subset G_{i,i+1}$. Но тогда $|G_{i,i+1} \cap \mathrm{N}_G(p)| \geq 2$, что противоречит структуре особых ромашек (а именно, лемме 10.19). $\square$

10.3.2 Гипердерево комплексов

Далее мы применим для описания взаимного расположения комплексов конструкцию гиперграфа разбиения.

Определение 10.27. Пусть $\mathfrak{C} = \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\}$ — множество всех комплексов трёхсвязного графа G. Обозначим через $A_{i\supset j}$ часть $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_i)$, к которой относится комплекс $\mathcal{C}_j$.

Каждому комплексу $\mathcal{C}_i$ поставим в соответствие разбиение $\mathfrak{C}_i$ остальных комплексов на классы: комплексы $\mathcal{C}_j$ и $\mathcal{C}_\ell$ попадут в один класс разбиения тогда и только тогда, когда $A_{i\supset j} = A_{i\supset \ell}$.

Будем говорить, что комплекс $\mathcal{C}_i$ *разделяет* $\mathcal{C}_j$ и $\mathcal{C}_\ell$, если $A_{i\supset j} \neq A_{i\supset \ell}$, то есть . они содержатся в разных классах разбиения $\mathfrak{C}_i$.

Назовем комплексы $\mathcal{C}_i$ и $\mathcal{C}_j$ *соседними*, если их не разделяет никакой отличный от них комплекс.

Обозначим через $\mathcal{T}(G)$ гиперграф, вершинами которого являются комплексы графа G, а гиперребрами — максимальные по включению множества попарно соседних комплексов. Гиперграф $\mathcal{T}(G)$ назовем *гиперграфом разбиения* графа G.

К сожалению, комплексы могут пересекаться. Однако, с помощью теоремы 10.3 можно доказать, что это пересечение не может быть большим — все общие множества двух комплексов содержатся в граничном разрезе.

Следствие 10.11. *Пусть комплексы $\mathcal{C}_i$ и $\mathcal{C}_j$ трёхсвязного графа G таковы, что $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j \neq \varnothing$. Тогда все множества из $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j$ содержатся в каждом из граничных разрезов $M_{A_{i\supset j}}$ и $M_{A_{j\supset i}}$.*

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j$. Понятно, что оба комплекса — нетривиальные. Тогда

$$T \subset \mathrm{O}(A_{i\supset j}) \cap V(\mathcal{C}_i) = W(M_{A_{i\supset j}}).$$

Как мы знаем по лемме 10.4, тогда T содержится в разрезе $M_{A_{i\supset j}}$. Для разреза $M_{A_{j\supset i}}$ аналогично. □

Лемма 10.35. *Пусть B — главная часть* $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_j)$*, отличная от $A_{j\supset i}$. Тогда $B \subset A_{i\supset j}$.*

Доказательство. Для удобства пусть $i = 1$, $j = 2$, $A_{1\supset 2} = A$. Поскольку существует хотя бы две главные части $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_2)$, этот комплекс не может быть тривиальным. Так как $B \neq A_{2\supset 1}$, по следствию 10.10 мы имеем

$$\mathrm{Int}(B) \cap V(\mathcal{C}_1) = \varnothing. \tag{10.1}$$

По лемме 3.7 тогда

$$R_B \text{ не может быть зависимо с множеством из } \mathcal{R}_3(G), \text{ содержащимся в } V(\mathcal{C}_1). \qquad (10.2)$$

Мы разберем два случая — комплекс $\mathcal{C}_1$ может быть тривиальным или нетривиальным.

1. $\mathcal{C}_1$ *— тривиальный комплекс.*
Пусть $a \in V(G)$, $d_G(a) = 3$, $T = \mathrm{N}_G(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathcal{C}_1 = \{T\}$ и $S = R_B$. Тогда $A = V(G) \setminus \{a\}$ и нам достаточно доказать, что $a \notin B$.

Предположим противное, пусть $a \in B$. Напомним, что T относится к части $A_{2\supset 1} \neq B$. Если $a \in \mathrm{Int}(B)$, то $T = \mathrm{N}_G(a) \subset B$, а значит, T относится к части B, противоречие.

Следовательно, $a \in S$. В силу (10.2) множество S независимо с T, но тогда $S \subset \{a\} \cup T$. Очевидно, это невозможно (в этом случае S не является разделяющим множеством).

2. $\mathcal{C}_1$ *— нетривиальный комплекс.*
В этом случае части A и B имеют окрестности, граничные разрезы и внешние границы, чем мы и будем пользоваться. Так, $R_B \subset V(\mathcal{C}_2) \subset \mathrm{O}(A)$. Из леммы 10.31 и (10.2) следует, что R_B и T_A независимы или совпадают. Аналогично, R_B и R_A независимы или совпадают. Рассмотрим три случая.

2.1. $R_B \neq T_A$.
Тогда существует такая часть $B' \in \mathrm{Part}(R_B)$, что $T_A \subset B'$. Так как $T_A \neq R_B$, мы имеем $T_A \cap \mathrm{Int}(B') \neq \varnothing$. Поэтому, $B' \neq B$. Тогда по лемме 3.2 мы имеем $B \subset \mathrm{O}(A)$ (см. рисунок 10.18a). Если $R_B \subset A$, то аналогично доказывается включение $B \subset A$, что нам и нужно.

Пусть $R_B \not\subset A$. Тогда R_B и R_A независимы и $R_B \subset \mathrm{O}(A)$, следовательно, $R_B \subset W(M_A)$. В нашем случае, M_A — разрез, а R_B не совпадает с его границами T_A и R_A. В силу леммы 10.2, тогда $|\mathrm{Part}(R_B)| = 2$, внутренность одной части $\mathrm{Part}(R_B)$ содержит вершину из T_A, а внутренность другой — вершину из R_A. Но одна из этих частей — B, что противоречит (10.1).

2.2. $R_B = T_A = R_A = R$.
Если $R \in \mathcal{C}_1$, то R относится именно к главной части $B \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_2)$ (так как $R = R_B$), противоречие.

Значит, $R \notin \mathcal{C}_1$. Тогда для части A выполнено утверждение 2° леммы 10.30: существует единственная часть $\overline{A} \in \mathrm{Part}(R)$, содержащая $V(\mathcal{C}_1)$, а A — объединение всех остальных частей $\mathrm{Part}(R)$. Мы знаем, что B

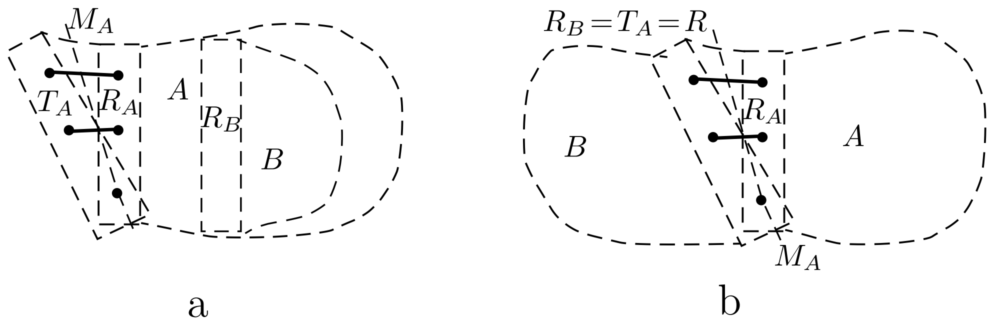


Рис. 10.18: Части A и B.

— объединение нескольких частей $\mathrm{Part}(R)$. Так как $B \neq A_{2\supset 1}$, по лемме 10.33 мы имеем $V(\mathcal{C}_1) \not\subset B$. Значит, $B \subset A$.

2.3. $R_B = T_A = R$, но $R_A \neq R$ (см. рисунок 10.18b).
Тогда $M_A \neq R_A$ и по замечанию 10.25 мы имеем $\mathrm{O}(A) \in \mathrm{Part}(R)$. Напомним, что $V(\mathcal{C}_2) \subset \mathrm{O}(A)$. Аналогично пункту 2.2, мы имеем $R \notin \mathcal{C}_1$. Тогда для части B выполнено утверждение 2° леммы 10.30: существует единственная часть $\overline{B} \in \mathrm{Part}(R)$, содержащая $V(\mathcal{C}_2)$. Следовательно, $\overline{B} = \mathrm{O}(A)$.

Кроме того, $V(\mathcal{C}_1) \subset \overline{B}$ в силу (10.1). Так как $M_A \neq R_A$, множество R_A — неодиночное. Тогда для части A выполнено утверждение 2° леммы 10.30: существует единственная часть $\overline{A} \in \mathrm{Part}(R_A)$, содержащая $V(\mathcal{C}_1)$. По лемме 10.30, часть A — объединение всех частей $\mathrm{Part}(R_A)$, кроме части $\overline{A} \supset V(\mathcal{C}_1)$. Таким образом, $V(\mathcal{C}_1) \subset \overline{B} \cap \overline{A} = \mathrm{O}(A) \cap \overline{A} = W(M_A)$. По лемме 10.31, $W(M_A) \subset V(\mathcal{C}_1)$. Следовательно, $\mathcal{C}_1$ — комплекс разреза M_A.

Вспомним, что граничный разрез M_B получается дополнением множества $R_B = T_A$ всеми возможными рёбрами, лежащими в $\overline{B} = \mathrm{O}(A)$, то есть, в частности, всеми рёбрами разреза M_A (границей которого является T_A). Это означает, что

$$V(\mathcal{C}_1) = W(M_A) \subset W(M_B) \subset V(\mathcal{C}_2),$$

откуда ввиду леммы 10.34 следует, что $|\mathcal{C}_1| = 1$. Тогда $\mathcal{C}_1 = \{R_A\}$ и $R_A = T_A = R_B$, противоречие. □

Лемма 10.36. *Пусть комплексы $\mathcal{C}_i$, $\mathcal{C}_j$ и $\mathcal{C}_\ell$ таковы, что $A_{j\supset i} \supset A_{i\supset \ell}$. Тогда $A_{j\supset \ell} = A_{j\supset i}$.*

Доказательство. По замечанию 10.25 мы имеем $\mathrm{O}(A_{i\supset \ell}) \subset \mathrm{O}(A_{j\supset i})$. В силу леммы 3.1, $\mathrm{Int}(A_{i\supset \ell}) \subset \mathrm{Int}(A_{j\supset i})$.

Предположим, что $\mathcal{C}_\ell = \{T\}$. Тогда $T \subset \mathrm{O}(A_{i \supset \ell}) \subset \mathrm{O}(A_{j \supset i})$. Так как T относится к части $A_{i \supset \ell}$, либо $T = \mathrm{Bound}(A_{i \supset \ell})$ (тогда $T \subset A_{j \supset i}$), либо $T \cap \mathrm{Int}(A_{i \supset \ell}) \neq \varnothing$ (тогда и $T \cap \mathrm{Int}(A_{j \supset i}) \neq \varnothing$). В обоих случаях T относится к части $A_{j \supset i}$, значит, $A_{j \supset \ell} = A_{j \supset i}$.

Далее пусть $|\mathcal{C}_\ell| \geq 2$. Тогда $V(\mathcal{C}_\ell) \subset \mathrm{O}(A_{j \supset i})$ и $A_{j \supset \ell} = A_{j \supset i}$ по лемме 10.33. □

Теорема 10.4. 1) *Гиперграф $\mathcal{T}(G)$ является гипердеревом.*

2) *Пусть $\mathcal{C}_i \in \mathfrak{C}$, а $H_1, \dots, H_\ell$ — компоненты связности гиперграфа $\mathcal{T}(G) - \mathcal{C}_i$. Тогда $\mathfrak{C}_i = \{H_1, \dots, H_\ell\}$.*

Доказательство. Оба утверждения данной теоремы непосредственно следуют из теоремы 4.5, поэтому, нам достаточно проверить, что выполнено ее условие.

Предположим, что комплекс $\mathcal{C}_i$ разделяет $\mathcal{C}_j$ и $\mathcal{C}_\ell$, то есть, $A_{i \supset j} \neq A_{i \supset \ell}$. Тогда по лемме 10.35 мы имеем $A_{i \supset \ell} \subset A_{j \supset i}$, откуда $A_{j \supset i} = A_{j \supset \ell}$ по лемме 10.36. Следовательно, комплекс $\mathcal{C}_j$ не разделяет $\mathcal{C}_i$ и $\mathcal{C}_\ell$. Таким образом, условие теоремы 4.5 выполнено. □

10.3.3 Комплексы и части разбиения

С помощью полученных результатов непустые части $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$ для трёхсвязного графа G можно описать через части разбиения графа комплексами. Отметим, что разбиение графа каждым из комплексов подробно описано выше.

Определение 10.28. Пусть R — гиперребро $\mathcal{T}(G)$. Для всех $\mathcal{C}_i \in R$ пусть $A_i \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_i)$ — главная часть, к которой относятся остальные комплексы гиперребра R. Назовём множество

$$A_R = \bigcap_{\mathcal{C}_i \in R} A_i$$

частью, соответствующей гиперребру R.

Через $\mathrm{Int}(A_R)$ будем обозначать множество всех вершин A_R, не входящих в множества из $\mathfrak{R}_3(G)$.

Часть A_R называется *непустой*, если $\mathrm{Int}(A_R) \neq \varnothing$.

Замечание 10.26. 1) Если $A_R \in \mathrm{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$, то $\mathrm{Int}(A_R)$ из определения 10.28 — это внутренность A_R как части $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$.

2) Возможен случай, когда $A_R = \varnothing$. Отметим, что даже при $A_R \neq \varnothing$ множество A_R может не быть частью $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$.

Лемма 10.37. *Для любого гиперребра R гиперграфа $\mathcal{T}(G)$ выполнены следующие утверждения.*

1) *Для каждого комплекса $\mathcal{C}_\ell \notin R$ существует такая часть $A_\ell \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_\ell)$, что $A_R \subset A_\ell$.*

2) *Если $\mathrm{Int}(A_R) \neq \varnothing$, то $A_R \in \mathrm{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$ — непустая часть.*

Доказательство. 1) По пункту 3 леммы 4.4 существует комплекс $\mathcal{C}_i \in R$, который отделяет в $\mathcal{T}(G)$ комплекс $\mathcal{C}_\ell$ от всех комплексов, входящих в R. Тогда по утверждению 2 теоремы 10.4 мы имеем $A_{i\supset\ell} \neq A_i$. Следовательно, $A_{\ell\supset i} \supset A_i$ по лемме 10.35 и часть $A_\ell = A_{\ell\supset i}$ нам подходит.

2) По пункту 1 для каждого комплекса $\mathcal{C}_\ell$ существует такая часть $A_\ell \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_\ell)$, что $A_R \subset A_\ell$. Следовательно, $A_R = \cap_{i=1}^n A_i$. В силу леммы 3.3, если $A_R \notin \mathrm{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$, то $A_R \subset S$, где $S \in \mathfrak{R}_3(G)$, что в нашем случае явно не так. Значит, $A_R \in \mathrm{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$. □

Теорема 10.5. *Пусть G — трёхсвязный граф, а $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ — все его комплексы. Тогда множество вершин H — непустая часть $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$, если и только если выполнено одно из двух следующих условий.*

1° *$H \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_\ell)$, где $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ — главная часть, к которой не относится ни один другой комплекс.*

2° *H — непустая часть, соответствующая некоторому гиперребру $\mathcal{T}(G)$.*

Доказательство. $\Leftarrow$. Пусть $H \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_\ell)$ — главная часть, к которой не относится ни один другой комплекс. Тогда по лемме 10.35 для любого $i \neq \ell$ мы имеем $A_{i\supset\ell} \supset H$. Следовательно, ни одно множество из $\mathfrak{R}_3(G)\backslash\mathcal{C}_\ell$ не разделяет H, откуда по лемме 3.4 имеем $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$. Внутренность H как части $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_\ell)$ по определению главных частей непуста и не пересекается с множествами других комплексов по следствию 10.10. Следовательно, H — непустая часть $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$.

Если H — непустая часть, соответствующая гиперребру $\mathcal{T}(G)$, то утверждение следует из леммы 10.37.

$\Rightarrow$. По лемме 3.3 существует представление $H = \cap_{i=1}^n H_i$, где $H_i \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_i)$. Отметим, что каждая часть H_i должна быть главной. Действительно, часть H_i непуста, а значит, она может быть неглавной только в случае, когда $\mathcal{C}_i$ — тривиальный комплекс. Но и этот случай невозможен по замечанию 10.23.

Итак, все части $H_1, \ldots, H_n$ — главные. Построим по части H орграф D_H на множестве вершин $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ следующим образом: для каждой пары таких $\alpha, \beta \in I$, что $H_\alpha \neq A_{\alpha\supset\beta}$, проведем стрелку $\beta\alpha \in A(D_H)$.

Утверждение 10.5.1. *Пусть $i_1 i_2 \dots i_m$ — путь в D_H. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(1) $H_{i_m} \ne A_{i_m \supset i_1}$.

(2) $H_{i_1} = A_{i_1 \supset i_m} \supset H_{i_m}$.

Доказательство. Докажем утверждения индукцией по m. Для каждого m сначала докажем утверждение (1), потом выведем из него утверждение (2).

База. Утверждение (1) для $m = 2$ выполнено по построению D_H.

Вывод (1) $\Rightarrow$ (2) **для** $m = k$**.**

Пусть доказано, что $H_{i_k} \ne A_{i_k \supset i_1}$. Тогда по лемме 10.35 мы имеем $A_{i_1 \supset i_k} \supset H_{i_k}$. Если $H_{i_1} \ne A_{i_1 \supset i_k}$ (см. рисунок 10.19a), то

$$H \subset H_{i_k} \cap H_{i_1} \subset A_{i_1 \supset i_k} \cap H_{i_1} \subset S \in \mathcal{C}_{i_1},$$

противоречие с $\mathrm{Int}(H) \ne \varnothing$. Следовательно, $H_{i_1} = A_{i_1 \supset i_k} \supset H_{i_k}$ (см. рисунок 10.19b).

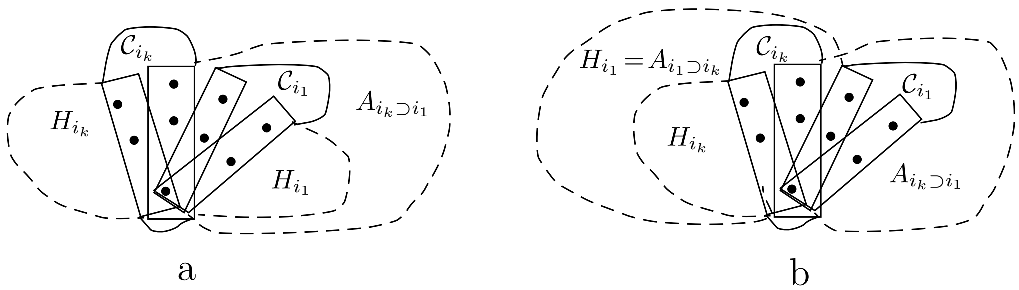


Рис. 10.19: Части H_{i_1} и H_{i_2}.

Переход $k \to k+1$ **в доказательстве** (1).

Напомним, что $k+1 \ge 3$ и оба утверждения доказаны для путей длины не более k. Предположим, что $H_{i_{k+1}} = A_{i_{k+1} \supset i_1}$. В силу (2) мы имеем $H_{i_2} = A_{i_2 \supset i_{k+1}} \supset H_{i_{k+1}} = A_{i_{k+1} \supset i_1}$. Следовательно, по лемме 10.36 выполнено $H_{i_2} = A_{i_2 \supset i_1}$, противоречие с определением D_H. □

Утверждение 10.5.2. *Орграф D_H ацикличен.*

Доказательство. Пусть $i_1 \dots i_k$ — цикл в D_H. Тогда по утверждению 10.5.1 мы имеем $H_1 = A_{i_1 \supset i_k}$, что противоречит $i_k i_1 \in A(D_H)$. □

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть J — множество всех индексов, из которых не выходит стрелок в D_H. По утверждению 10.5.2 мы имеем $J \ne \varnothing$. Разберем два случая.

a. $|J| = 1$.
Пусть $J = \{j\}$. Тогда для любого $i \neq j$ существует ij-путь в D_H, следовательно, по утверждению 10.5.1, $H_j \neq A_{j\supset i}$. Значит, часть H_j не содержит ни один из отличных от $\mathcal{C}_j$ комплексов. Выше доказано, что тогда $H_j \in \mathrm{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$, значит, $H = H_j$, то есть, выполнено условие 1°.

b. $|J| \geq 2$.
В этом случае докажем, что $R_J = \{\mathcal{C}_j \ : \ j \in J\}$ — гиперребро $\mathcal{T}(G)$. По построению D_H, для любых двух $j, j' \in J$ мы имеем $H_j = A_{j\supset j'}$.

Для любого $i \notin J$ существует ij-путь в D_H, где $j \in J$. Пусть $j' \in J$, $j' \neq j$. По утверждению 10.5.1,

$$A_{j\supset i} \neq H_j = A_{j\supset j'} \quad \text{и} \quad A_{i\supset j} = H_i \supset H_j = A_{j\supset j'}.$$

Тогда по лемме 10.36 мы имеем $A_{i\supset j} = A_{i\supset j'}$. Таким образом, комплекс $\mathcal{C}_i$ не разделяет никакие два комплекса из R_J, а комплекс $\mathcal{C}_j$ отделяет $\mathcal{C}_i$ от всех комплексов $\mathcal{C}_{j'} \in R_J$, где $j' \neq j$. Значит, R_J — максимальное по включению множество попарно соседних комплексов, то есть, гиперребро $\mathcal{T}(G)$. Более того, $H \subset A_{R_J}$. Тогда $\mathrm{Int}(A_{R_J}) \supset \mathrm{Int}(H) \neq \varnothing$, следовательно, A_{R_J} — непустая часть $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$. Тогда $H = A_{R_J}$, то есть, выполнено условие 2°. $\square$