Я буду рассазывать о r-дифференциальных частично упорядоченных множествах. Что такое частично упорядоченное множество все должны знать.

Определение 1. *Частично упорядоченное множество P называется локально конечным, если $\forall a, b \in P$ таких $x \in P$, что $a < x < b$ конечное число.*

Определение 2. *Частично упорядоченное множество P называется градуированным, если оно снабжено функцией ранга $\rho : P \to \mathbb{N}_0$:*

1) Если $x < y$, то $\rho(x) < \rho(y)$.

2) Если $x < y$ и $\nexists z : x < z < y$, то $\rho(y) = \rho(x) + 1$. В таком случае говорят, что y покрывает x.

Главное определение:

Определение 3. *Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $P = \cup_{n \geq 0} P_n$ локально конечное градуированное частично упорядоченное множество с наименьшим элементом нулевого ранга. Тогда оно называется r-дифференциальным, если:*

1) $\forall x \neq y \in P$ покрывают k общих элементов $\Leftrightarrow$ они покрываются k общими элементами.

2) $x \in P$ покрывает m элементов $\Leftrightarrow$ он покрывается $m+r$ элементами.

Утверждения:

Утверждение 1. *В первой части крайнего определения k может принимать только значения 0 и 1.*

Определение 4. *Размерность гиперребра F гиперграфа H - $dimF = |F| - 1$.*

Утверждение 2. *$\forall r$ существует биекция между $P_{[1,2]} = P_1 \cup P_2$ с гиперграфами с множеством вершин $V = \{1, 2, ..., r\}$, такими что размерность всех рёбер положительна, и любое подмножество V из двух элементов содержится ровно в одном гиперребре.*

Утверждение 3. *Пусть P - r-дифференциальное ЧУМ с ранг-функцией $p : p_0 = 1, p_1 = r, ...(p_i = |P_i|)$, а T_1 - сумма размерностей гиперрёбер гиперграфа, ассоциированного с $P_{[1,2]}$. Тогда:*

$$p_2 = r(r+1) - T_1.$$

Утверждение 4. *Для r-дифференциального ЧУМ максимальное возможное значение p_2 равно $r^2 + 1$, следующее равно $r^2 - r + 3$, а минимальное равно $\frac{r^2+3r}{2}$.*

Утверждение 5. *$r \geq 6 \Leftrightarrow \exists P, Q : P$ и Q r-дифференциальные ЧУМва, P и Q имеют одинаковые ранг-функции, но $\forall a \in \mathbb{N}$ $P_{[a,a+1]} = P_a \cup P_{a+1}$ не изоморфно $Q_{[a,a+1]} = Q_a \cup Q_{a+1}$.*

Определение 5. *Говорят, что множество последовательностей натуральных чисел удовлетворяет интервальному свойству, если:*

$\forall h = (h_0, ..., h_{i-1}, h_i, h_{i+1}, ...), h' = ((h_0, ..., h_{i-1}, h_i+\alpha, h_{i+1}, ...))$, *где* $\alpha > 0$ *- последовательностей из этого множества любая последовательность вида* $(h_0, ..., h_{i-1}, h_i + \beta, h_{i+1}, ...)$, *где* $0 < \beta < \alpha$ *принадлежит этому множеству.*

Теорема 1. *Множество всех ранг функций r-дифференциальных ЧУМов не удовлетворяет интервальному свойству.*

Определение 6. *Пусть* $P = \cup P_{n\geq 0}$*- r-дифференциальное ЧУМ.*

$\kappa(n \to n+1 \to n \to n+1 \to n) :=$ *количество путей вида* $x_1 < x_2 > x_3 < x_4 > x_5 = x_1$, *где* $x_1, x_3 \in P_n,\ x_2, x_4 \in P_{n+1}$.

$\alpha(n \to n+1 \to n) :=$ *количество путей вида* $x_1 < x_2 > x_3$, *где* $x_1, x_3 \in P_n,\ x_2 \in P_{n+1}$.

$\alpha(n \to n+1) :=$ *количество путей вида* $x_1 < x_2$, *где* $x_1 \in P_n,\ x_2 \in P_{n+1}$.

Для $x \in P$ $c(x) :=$ *количество элементов, покрывающих* x.

Лемма 1. $\forall n \geq 0$ *и* P *- r-дифференциального ЧУМа*

$$\sum_{x\in P_n} c(x)^2 = \kappa(n \to n+1 \to n \to n+1 \to n) - \alpha(n \to n+1 \to n) + \alpha(n \to n+1).$$

Лемма 2. $\forall n \geq 0$ *и* P *- r-дифференциального ЧУМа с ранг-функцией* p

$$\sum_{x\in P_n} c(x)^2 = \sum_{j=0}^{n} (r^2(n-j+1) + \epsilon r)p_j,$$

где $\epsilon = (n-j)\ mod\ 2$.

Теорема 2. $\forall P$ *- r-дифференциального ЧУМа с ранг-функцией* p $\exists a:$

$$n^a e^{2\sqrt{rn}} = O(p_n).$$

Всё доказывается либо ручками, либо ссылками на другие статьи. Я в этом не виноват, это статья такая.