Проблема дискретной геодезической

Alex Morakhovski

April 2019

1 Introduction

Нам дан многогранник, заданный набором граней, ребер и вершин. Мы считаем грани замкнутыми многоугольниками (они включают в себя их границы) и ребра должны быть отрезками отрезков (они включают в себя их конечные точки, которые являются вершинами). Нам также даны две специальные точки s и t, начало и конец пути. Без ограничения общности мы предполагаем, что все грани - это треугольники и что s и t вершины многогранника. Нас просят найти кратчайший путь от источника к месту назначения, которое полностью лежит на поверхности.

Утверждение 1 *Существует геодезическая от s до любой другой точки x. Кроме того, среди геодезических от s до x существует по крайней мере один путь минимальной длины.*

Утверждение 2 *Если является геодезической, которая соединяет последовательность ребер, то плоское разворачивание вдоль последовательности ребер представляет собой отрезок.*

Утверждение 3 *Общая форма геодезичой - это путь, который проходит через чередующиеся последовательности вершин и (возможно пустые) реберные последовательности, так что развернутое изображение пути вдоль любой последовательности ребер представляет собой отрезок и угол пути, проходящего через вершину, больше или равен π.*

Утверждение 4 *Оптимальный путь $p(x)$ к точке x проходит через внутренность не более одной грани содержащего x.*

2 Алгоритм

Алгоритм работает примерно как "непрерывный"Алгоритм Дейкстра. "Сигнал"распространяется от источника к остальной поверхности. Как только точка x поверхности получает сигнал в первый раз, она распространяется дальше; точка x считается постоянно помеченной временем $d(x)$, в которое она получила сигнал, что, разумеется, является минимальным расстоянием от источника до х. К счастью, мы должны сделать эту маркировку и перераспространение только для конечного числа (фактически, как мы покажем, $O(n^2)$) точек (называемых точками события) поверхности. (На самом деле мы делаем "направленную"форму непрерывной Дейкстры, поскольку мы помечаем точки на ребре с длинами путей, падающих на ребро с любой из двух сторон ребра.) Алгоритм использует несколько простых структур данных. Мы ведем список, ILIST, кандидатов интервалов оптимальности. Интервал-кандидат (или короткий интервал) - это подсегмент ребра, который является суперсегментом некоторого (возможно, пустого) интервала оптимальности и имеет точно такую же структуру, что и этот интервал (т. Е. Он имеет тот же тип информации, связанный с ним в его структуре данных). Мы называем их интервалами кандидатами, потому что при завершении нашего алгоритма все оставшиеся будут нашими интервалами оптимальности геодезической.

3 Алгоритм еще раз

(0)- Инициализация. Помечаем s нулем. Инициализируем ILIST, чтобы быть пустым. Для каждого ребра, противоположного s, создайте интервал кандидата, длина которого равна всему ребру, а корень s. Вычисляем точку самую близкую к s на каждом из противоположным ребер, помещаем каждую такую точку и конечные точки ребер в очередь событий, причем каждая точка помечает свое расстояние от s. Вставляем полученные интервалы в список ILIST и в списки интервалов соответствующих пар ребер-граней.

(1)-Main Loop. Пока в очереди событий есть запись, удаляем самое маленькое значение и помечаем его. Если он помечен как точка границы некоторого потенциального интервала, тогда делаем Распространение. Интуитивн, распространение интервала означает, что "волна"сигналов от корня проходит через интервал к другим двум краям грани.

Если какие то точки покрываются двумя интервалами, то удаляем ту с большим значением.

Алгоритм работает, и работает с временем $O(nlogn)$ и требует $O(n^2)$ памяти, где n - количество ребер поверхности. После того, как мы запустим наш алгоритм, расстояние от источника до любого другого пункта назначения может быть определено с использованием стандартных методов за время $O(logn)$