Современные методы в теоретической информатике
О связи между различными свойствами жёсткости

Золотов Б.

Основные определения

Определение: Конфигурация $(G, \mathbf{p})$, состоящая из n точек и рёбер между ними, называется *локально жёсткой*, если не существует непрерывного движения точек конфигурации такого, что

(а) оно сохраняет длины рёбер из G,

(б) оно **не** является сужением на точки $\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_n$ движения, состоящего из изометрий всего пространства $\mathbb{R}^d$.

Иными словами, мы могли, немного сдвинув точки, не изменить расстояние между ними, только если мы применили к ним глобальную изометрию, сохранив внешний вид конфигурации.

Определение: *Flex* конфигурации $(G, \mathbf{p})$ — это набор векторов $\mathbf{p}' = (\mathbf{p}'_1 \ldots \mathbf{p}'_n)$ (всё вместе лежит в $\mathbb{R}^{nd}$) такой, что для любого ребра (i, j) из G верно

$$\left(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\right) \cdot \left(\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}'_j\right) = 0.$$

Иными словами, это указание направлений в каждой вершине таких, что если начать двигать вершины в этих направлениях, то в нулевой момент времени при этом движении не будут растягиваться / сжиматься рёбра конфигурации.

Определение: Матрица жёсткости — это матрица $R(\mathbf{p})$ такая, что

$$R(\mathbf{p})\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} \ldots \\ \left(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\right) \cdot \left(\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}'_j\right) \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Матрица имеет размер $e \times nd$ — будучи применена к вектору $(\mathbf{p}'_k)$ размера nd, она даёт вектор высоты e, проиндексированный рёбрами $(i, j) \in G$. Заметим, что компоненты такой матрицы линейно зависят от координат вершин $\mathbf{p}$, поэтому её можно превратить в «билинейную форму»

$$R(\mathbf{p}, \mathbf{p}'): \quad \mathbb{R}^{nd} \times \mathbb{R}^{nd} \longrightarrow \mathbb{R}^e.$$

Таким образом, $\mathbf{p}'$ — flex для $\mathbf{p}$ тогда и только тогда, когда

$$R(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = 0.$$

Определение: Конфигурация $(G, \mathbf{p})$ называется *первопорядково жёсткой (infinitesimally rigid)*, если у неё не существует нетривиальных флексов — таких, которые **не** получаются взятием в нуле первой производной гладкого движения из изометрий $\mathbb{R}^d$.

Определение: *Стресс* — сопоставление каждому ребру (i, j) числа $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ (для тех пар вершин, которые не являются рёбрами, положим $\omega_{\dots} = 0$) такого, что для всякой вершины i

$$\sum_j \omega_{ij} \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = 0.$$

Определение: Конфигурация $(G, \mathbf{p})$ называется *prestress stable*, если существует стресс ω такой, что для любого нетривиального флекса $\mathbf{p}'$ выполнено

$$\sum_{i<j} \omega_{ij} \cdot (\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}'_j)^2 > 0.$$

Иными словами, то влияние, которые $\mathbf{p}'$ оказывает на длины рёбер конфигурации, незамедлительно портит сумму «весов», расставленных нами на рёбрах.

Определение: *Flex второго порядка* — два набора векторов $\mathbf{p}'$, $\mathbf{p}''$ таких, что

$$\begin{aligned} R(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= 0; \\ R(\mathbf{p}, \mathbf{p}'') + R(\mathbf{p}', \mathbf{p}') &= 0. \end{aligned}$$

Определение: Конфигурация называется *второпорядково жёсткой*, если для неё не существует флексов второго порядка, у которых $\mathbf{p}'$ нетривиален как флекс первого порядка.

Свойство, описанное выше, эквивалентно следующему ослаблению описанного ранее свойства prestress stability:

$$\forall\, \mathbf{p}' \text{ — нетривиального флекса} \quad \exists\, \omega \text{ — стресс} \quad \sum_{i<j} \omega_{ij} \cdot (\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}'_j)^2 > 0.$$

Определение: *Привязанная* жёсткость второго порядка — то же самое, только ещё дано подмножество $G_0 \subset V(G)$, на котором $\mathbf{p}'$ обязано обращаться в ноль.

Определение: Конфигурация называется *универсально *** жёсткой*, если соответствующее свойство выполнено при любой реализации данной конфигурации в произвольной размерности $\mathbb{R}^D$. Пример локально жёсткой, но не универсально локально жёсткой конфигурации — два треугольника с общей стороной.

Определение:

$$\mathcal{C}'(d, G_0) = \left\{ \mathbf{p}' \in \mathbb{R}^{nd} \mid \mathbf{p}'_j = 0 \text{ на вершинах из } G_0 \right\}.$$

Супер-стабильность

Пусть дан стресс ω. Определим его энергию как

$$E_\omega(\mathbf{q}) = \sum_{i<j} \omega_{ij}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)^2.$$

Понятно, что объект выше является квадратичной формой. Её матрица имеет вид $\mathbb{I}\mathrm{d} : \otimes \boldsymbol{\Omega}$. Ω называется *матрицей стресса*.

Определение: Конфигурация $(G, \mathbf{p})$ называется *супер-стабильной*, если для неё существует стресс ω, такой что

(1) Матрица Ω для этого стресса положительно полуопределена;

(2) Её ранг — $n-d-1$, где d — размерность аффинной оболочки $\langle \mathbf{p} \rangle$;

(3) Направления рёбер этой конфигурации не лежат на общей конике в проективном пространстве $P\langle \mathbf{p} \rangle$.

Теорема: Универсальная prestress stability равносильна супер-стабильности.

Классические результаты

Теорема: Всякий стресс $\omega \in \mathbb{R}^e$ лежит в коядре $R(\mathbf{p})$ — иными словами, перпендикулярен образу этого линейного отображения.

Теорема: Первопорядковая жёсткость $\Longrightarrow$ prestress stability $\Longrightarrow$ второпорядковая жёсткость $\Longrightarrow$ локальная жёсткость.

Теорема: Prestress stable–системы реализуют минимум энергии, определённой специальным образом.

Основные результаты

Определение: Если Y — выпуклый замкнутый конус, то *двойственный к нему* конус определяется как

$$Y^* = \{\omega \in \mathbb{R}^m \mid \langle \omega, y \rangle \geq 0,\ \forall y \in Y\}.$$

Теорема: Пусть Y — замкнутый выпуклый конус, L — линейное подпространство $\mathbb{R}^m$, пересекающееся с ним по нулю. Тогда существует элемент из ортогонального дополнения этого подпространства, лежащий во внутренности двойственного конуса $Y*$.

Теорема: $Y = \{R(\mathbf{p}', \mathbf{p}') \mid \mathbf{p}' \in \mathcal{C}'(d, G_0)\} \subset \mathbb{R}^e$ — замкнутый выпуклый конус.

Теорема: Пусть $(G, \mathbf{p})$ — второпорядково жёсткая с привязанным множеством вершин G_0, при этом афинная оболочка у «привязанных» вершин — та же, что и у всех. Тогда Y пересекается разве что по нулю с линейным пространством L столбцов матрицы R.

Теорема: Любой вектор $\omega \in L^{\perp}$ является корректно определённым стрессом для $(G, \mathbf{p})$. Любой вектор $\omega \in \operatorname{Int}(Y^{*})$ соответствует матрице Ω, положительно определённой на $\mathcal{C}'(1, G_0)$, подпространстве $\mathbb{R}^n$.

Теорема: Пусть $(G, \mathbf{p})$ — универсально второпорядково жёсткая конфигурация. Тогда у ней есть стресс с матрицей Ω, положительно определённой на $\mathcal{C}'(1, G_0)$.

Главный результат

Теорема: Пусть конфигурация $(G, \mathbf{p})$ — универсально второпорядково жёсткая, а также обладает d–мерной аффинной оболочкой. Тогда она обязана имет стресс и матрицу стресса ранга $n - d - 1$, являющуюся положительно определённой — то есть, на самом деле, конфигурация должна быть супер-стабильной.

Отсюда универсальная супер-стабильность равносильна универсальной второпорядковой жёсткости.