Классная работа 11 (от 21.04).

ALG 1.

(а) Пусть V_1 — множество последовательностей $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ вещественных чисел таких, что для любого натурального $n > 2$ верно, что $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$. Докажите, что существуют ϕ_1 и ϕ_2, что $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in V_1$ тогда и только тогда, когда существуют такие вещественные c_1 и c_2, что для любого n выполнено равенство $a_n = c_1\phi_1^n + c_2\phi_2^n$.

(б) Пусть V_2 — множество последовательностей $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ вещественных чисел таких, что для любого натурального $n > 2$ верно, что $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$. Докажите, что существует ϕ, что $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in V_1$ тогда и только тогда, когда существуют такие вещественные c_1 и c_2, что для любого n выполнено равенство $a_n = c_1\phi^n + c_2 n\phi^n$.

(в) Исследуйте последовательности удовлетворяющие рекуррентному соотношению: $a_n + m = d_1 a_{n+m-1} + \cdots + d_m a_n$.

ALG 2. Пусть $A, B \in \mathbb{R}_{n,n}$ — некоторые матрицы, докажите, что $\mathrm{rk}(A + B) \leq \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B)$.

ALG 3. Пусть $A \in \mathbb{R}_{n,n}$ — некоторая матрица и r — ее ранг. Докажите, что

(а) существуют $B_1, \ldots, B_r$ такие, что $A = \sum_{i=1}^{r} B_i$ и $rk(B_i) = 1$;

(б) если существуют $B_1, \ldots, B_m$ такие, что $A = \sum_{i=1}^{m} B_i$ и $rk(B_i) = 1$, то $m \geq r$.

ALG 4. Исследуйте систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}.$$