Классная работа 12 (от 12.05).

$\boxed{\textbf{ALG 1.}}$ Для каждого из указанных ниже отображений пространства всех многочленов степени не выше n из кольца $\mathbb{R}[x]$ в себя установить является ли оно линейным оператором, и в случае положительного ответа найти матрицу оператора в базисе 1, x, ..., x^n.

(а) $A(f(x)) = f(x+2)$;

(б) $A(f(x)) = f'(x)$;

(в) $A(f(x))$ — остаток от деления $f(x^2)$ на x^{n+1};

(г) $A(f(x))$ — остаток от деления $\int_0^x f(t)dt$ на x^{n+1}.

$\boxed{\textbf{ALG 2.}}$ Пусть V — линейное пространство из предыдущей задачи. Найдите образ и ядро следующих отображений:

(а) оператора дифференцирования D;

(б) для $h \in \mathbb{R}$ разностного оператора A_h, определяемого равенством $A_h = \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x))$.

$\boxed{\textbf{ALG 3.}}$

(а) Доказать, что оператор дифференцирования над V — не обратим.

(б) Доказать, что оператор дифференцирования над $\langle \sin(x), \cos(x) \rangle$ — обратим.

$\boxed{\textbf{ALG 4.}}$ Пусть V — некоторое векторное пространство и $A : V \to V$ — линейное отображение. Будем называть его нельпотентным тогда и только тогда, когда существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $A^m(V) = \{0\}$.

(а) Докажите, что если U — подпространство V то, $A(U) = U$ тогда и только тогда, когда $U = \{0\}$.

(б) Докажите, что $m \leq \dim(V)$.

(в) Докажите, что для любого $v \in V$, если $A^{m-1}(v) \neq 0$, то v, $A(v)$, ..., $A^{m-1}(v)$ — линейно независимы.

(г) Докажите, что $E - A$ — обратим.

(д) Выразите $(E-A)^{-1}$, через E и A.