

Листок 11. Энтропия.

DM-ML 74. Покажите, что если $H[X] \leq t$, то найдется такое значение b , что $\Pr[X = b] \geq 2^{-t}$.

DM-ML 75. Рассмотрим функцию $h(p) = p \log(\frac{1}{p}) + (1-p) \log(\frac{1}{1-p})$, функция определена на $[0, 1]$, $h(0) = h(1) = 0$.

- (а) Покажите, что $h(p)$ строго возрастает на $[0; \frac{1}{2}]$ и убывает на $[\frac{1}{2}; 1]$.
- (б) Покажите, что h вогнутая функция (в другой терминологии выпукла вверх).

DM-ML 76. Покажите, что $H[X, Y] \geq H[X]$.

DM-ML 77. Пусть есть бинарное дерево и в нем N листьев. Пусть $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_N$ это глубины всех листьев дерева.

- (а) Докажите, что $\sum_{i=1}^N 2^{-\ell_i} \leq 1$.
- (б) Докажите, что если $\sum_{i=1}^N 2^{-\ell_i} \leq 1$, то найдется дерево из N листьев с глубинами $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_N$.

DM-ML 78. Пусть есть бинарное дерево и в нем N листьев.

- (а) Покажите, что глубина хотя бы одного листа не меньше $\log N$.
- (б) Покажите, что средняя глубина листа не меньше $\log N$. (Более строгая формулировка: рассмотрим случайную величину, которая выбирает случайный лист и выдает ее глубину, докажите, что математическое ожидание этой случайной величины не меньше $\log N$.)

DM-ML 79. Пусть \mathcal{F} — это семейство подмножеств $\{1, 2, \dots, n\}$, а p_i — это доля элементов \mathcal{F} , которые содержат элемент i . Докажите, что $|\mathcal{F}| \leq 2^{\sum_{i=1}^n h(p_i)}$.

DM-ML 80. Пусть $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — случайная величина, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Покажите, что $H[f(X)] \leq H[X]$. Когда достигается равенство?

DM-ML 81. Укажите явную биекцию между множеством бесконечных последовательностей чисел из множества $\{0, 1, 2\}$ и множеством бесконечных последовательностей из нулей и единиц.

DM-ML 27. Правило ослабления позволяет вывести из дизъюнкта A дизъюнкт $A \vee B$ для любого дизъюнкта B . Покажите, что если из дизъюнктов D_1, D_2, \dots, D_n семантически следует дизъюнкт C (это значит, что любой набор значений переменных, который выполняет все дизъюнкты D_i , выполняет также и C), то C можно вывести из D_i с помощью применений правил резолюции и ослабления.

DM-ML 28.

- (в) Постройте схему размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$, которая вычислит результаты сравнений чисел $\overline{a_i a_{i-1} \dots a_1}$ и $\overline{b'_i b'_{i-1} \dots b'_1}$ для всех i от 1 до n .

(г) Покажите, что существует схема для сложения двух n -битных чисел размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$.

DM-ML 54.

(б) В связном графе степени всех вершин не менее двух. Докажите, что в нем можно удалить две соединенные ребром вершины без потери связности.

DM-ML 70. Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из m дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.

DM-ML 73. Доминирующее множество в графе — это такое множество, что для каждой вершины либо она сама лежит в этом множестве, либо она соединена ребром с вершиной из этого множества. В графе G минимальная степень вершины равняется $d > 1$. Докажите, что в G есть доминирующее множество размера не больше $n \frac{1 + \ln(d+1)}{d+1}$. Подсказка: рассмотрите случайное подмножество вершин, в которое каждая вершина включается с вероятностью $p = \frac{\ln(d+1)}{d+1}$.