

Листок 7. Мощности множеств.

DM-ML 44.

- (а) Сколько существует ломаных, идущих из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$ шагами $(1, 1)$ и $(1, -1)$?
- (б) Покажите, что число ломаных, из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, пересекающих прямую $y = -1$, равняется числу ломанных из $(0, 0)$ в $(2n, -2)$.
- (в) Найдите число ломанных из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, не опускающихся в нижнюю полуплоскость. Это число называется числом Каталана c_n .
- (г) Покажите, что $c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \dots + c_{n-1}c_0$.

DM-ML 45. Посчитайте количество способов соединения $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами.

DM-ML 46. Докажите, что множество бесконечных последовательностей, состоящих из цифр $\{0, 1, 2\}$ равномощно множеству бесконечных последовательностей, состоящих из цифр $\{0, 1\}$.

DM-ML 47.

- (а) Докажите, что любое семейство непересекающихся интервалов на прямой конечно или счетно.
- (б) Докажите, что множество точек строго локального минимума любой функции из $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ конечно или счетно.

DM-ML 48. Докажите, что множество всех прямых на плоскости равномощно множеству точек на прямой.

DM-ML 49. Докажите, что если множество на плоскости содержит отрезок, то оно равномощно \mathbb{R} .

DM-ML 27. Правило ослабления позволяет вывести из дизъюнкта A дизъюнкт $A \vee B$ для любого дизъюнкта B . Покажите, что если из дизъюнктов D_1, D_2, \dots, D_n семантически следует дизъюнкт C (это значит, что любой набор значений переменных, который выполняет все дизъюнкты D_i , выполняет также и C), то C можно вывести из D_i с помощью применений правил резолюции и ослабления.

DM-ML 28.

- (в) Постройте схему размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$, которая вычислит результаты сравнений чисел $\overline{a_i a_{i-1} \dots a_1}$ и $\overline{b'_i b'_{i-1} \dots b'_1}$ для всех i от 1 до n .
- (г) Покажите, что существует схема для сложения двух n -битных чисел размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$.

DM-ML 36. Покажите, что предикат « p — n -ое простое число» выразимым в арифметике.

DM-ML 37. Покажите, что предикат $x = 2$ невыразим в интерпретации $(\mathcal{N}, =, \text{“}x \text{ делит } y\text{”})$.

DM-ML 40.

(б) Докажите, что число способов разбить число n на сумму k целых неотрицательных слагаемых, равняется $\binom{n+k-1}{k-1}$. Порядок слагаемых имеет значение.

DM-ML 41. Докажите, что число способов разбить число n на не более, чем k различных слагаемых совпадает с числом способов разбить число n на слагаемые, не превосходящие k . В этой задаче порядок слагаемых не имеет значения.

DM-ML 42. Посчитайте число пар пересекающихся диагоналей в выпуклом n -угольнике.

DM-ML 43. Сколько существует способов разбить выпуклый n -угольник на треугольники непересекающимися диагоналями?