

Домашняя работа 4. Рекуррентные соотношения.

Необходимо набрать 5 баллов.

COMB 51. (1 балл) Докажите, что разбиений числа n , в которых все слагаемые не превосходят k , столько же, сколько разбиений n на не более k не нулевых слагаемых.

COMB 52. (2 балла) Пусть F — набор подмножеств n -элементного множества, удовлетворяющий следующим свойствам:

1. $\forall A \in F : |A| \equiv 1 \pmod{2}$.
2. $\forall A, B \in F : A \neq B \Rightarrow |A \cap B| \equiv 0 \pmod{2}$.

Доказать, что $|F| \leq n$.

COMB 53. (1 балл) Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ считается зависящей от своего параметра x_i , если существуют такие b_1, \dots, b_n такие, что $f(b_1, \dots, b_{i-1}, 0, \dots, b_n) \neq f(b_1, \dots, b_{i-1}, 1, \dots, b_n)$. Подсчитайте число функций которые зависят от всех своих n аргументов.

COMB 54. (1 балл) В школе три спортивных команды. Для любых двух учеников найдется команда, в которой они состоят оба. Докажите, что найдется команда, в которой состоят по меньшей мере $2/3$ учеников.

COMB 55. (2 балла) Докажите комбинаторно следующую формулу:

$$\widehat{S}(n, k) = \sum_{i=1}^n \widehat{S}(n-i, k-1) \cdot k^i.$$