

Практика 4. Рекуррентные соотношения.

COMB 46. Пусть последовательность a_n удовлетворяет следующим рекуррентным соотношениям: $a_{n+2} = \alpha_1 a_{n+1} + \alpha_0 a_n$ и $a_{n+2} = \beta_1 a_{n+1} + \beta_0 a_n$. Напишите необходимые и достаточные условия на $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0$ и β_1 для существования такой a_n .

COMB 47. Доказать, что числа Фибоначчи F_n удовлетворяют следующим соотношениям:

- (а) $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$;
- (б) $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

COMB 48. Докажите, что любое натуральное число N можно единственным образом представить в виде суммы

$$N = a_2 F_2 + \dots + a_n F_n,$$

в которой коэффициенты a_i равны 0 или 1, а кроме того, никакие два идущих подряд элемента последовательности чисел $\{a_i\}$ не равны одновременно единице.

COMB 49. Сколько битовых строк длины n не содержат ни подстроки 000, ни подстроки 111?

COMB 50. В черном ящике лежит две битовых строки A и B длины r^2 . Наша задача — установить, равны они или нет. Для этого можно выполнять запросы следующего вида. Для каждого $i \in [r^2]$ мы решаем, хотим мы узнать i -й бит в строке A или в строке B . В ответ нам возвращается строка C длины r^2 , в которой на i -й позиции стоит i -й бит одной из строк A и B , согласно нашему запросу.

После каждого запроса мы можем проанализировать полученную строку C и записать какую-то информацию в *неперезаписываемую* память. Затем мы можем перейти к новому запросу; при этом строка C исчезает и никакой информации о строках A и B кроме той, которая была ранее сохранена в неперезаписываемой памяти, мы в начале нового запроса не имеем.

Как проверить равенство строк A и B , используя $r + 1$ запрос и r бит неперезаписываемой памяти?