

Листок 6. Предикатные формулы.

ML 30. Пусть сигнатура содержит только одноместные предикатные символы. Покажите, что:

- (а) всякая выполнимая формула, содержащая n предикатных символов, выполнима и в интерпретации, в носителе которой не более 2^n элементов;
- (б) существует алгоритм, проверяющий выполнимость таких формул.

ML 31. Приведите пример формулы, которая истинна во всех интерпретациях с конечным носителем, но не является общезначимой.

ML 32. Докажите общезначимость следующих формул при помощи алгоритма рассказанного на лекции (перейти к отрицанию, привести к предваренной форме применить сколемизацию и воспользоваться теоремой Эрбрана):

- (а) $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$;
- (б) $\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$;
- (в) $(\exists x (P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$;
- (г) $(\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)) \rightarrow (\exists x (P(x) \rightarrow Q(x)))$;
- (д) $\exists x (A(c, x) \rightarrow A(x, d))$.

ML 33. Теперь секвенцией будем называть $\Gamma \vdash \Delta$, где Γ и Δ — это списки предикатных формул.

Добавим в секвенциальное исчисление четыре новых правила которые соответствуют кванторам (см. табличку).

В правилах $(\forall\vdash)$ и $(\vdash\exists)$, $A(t/x)$ обозначает, что в формуле A переменная x заменяется на терм t , при этом для каждого вхождения переменной x никакие переменные терма t не должны попасть в область действия кванторов по одноименным переменным (в формуле A). Например для формулы $\forall y P(x, y)$ вместо x нельзя подставить $f(y)$.

А в других двух правилах $A(y/x)$ означает, что в формуле A мы заменили все вхождения x на переменную y , при этом переменная y должна быть свежей то есть не входить ни в A , ни в другие формулы из секвенции.

Докажите корректность секвенциального исчисления (покажите, что если секвенция $\Gamma \vdash \Delta$ выводима, то в любой интерпретации либо хотя бы одна формула из Γ ложна, либо хотя бы одна формула из Δ истинна).

ML 34. Для всех формул из задачи 32 покажите, что они выводимы в исчислении секвенций (формула ϕ выводима, если выводима $\vdash \phi$).

ML 21. Докажите, что существует: счетное число не пересекающихся перечислимых множеств, никакие два из которых нельзя отделить

разрешимым.

ML 23.

Задача Поста состоит в следующем: есть доминошки n видов $\begin{bmatrix} s_i \\ t_i \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} s_n \\ t_n \end{bmatrix}$, s_i и t_i — конечные строки, есть неограниченный запас доминошек каждого вида, доминошки переворачивать нельзя. Требуется определить, можно ли составить несколько доминошек так, чтобы в верхней и нижней их половине читалась одна и та же строка, такие последовательности доминошек будем называть согласованными. Докажите, что задача Поста алгоритмически неразрешима.