Листок 9. Аксиоматизируемость.

$\boxed{\textbf{ML 46.}}$ Построите две неизоморфные интерпретации теории $\mathrm{Th}(\mathbb{Q},<,=)$ (плотный линейный порядок без первого и последнего элемента) мощности континуум.

$\boxed{\textbf{ML 47.}}$ В алгебре вам доказывали, что если K — некоторое поле, а многочлен $f \in K[x]$ неприводим, то существует K' надполе поля K, в котором многочлен f имеет корень (в качестве поля K' можно взять $K[x]/<f>$, это кольцо является полем как фактор-кольцо по максимальному идеалу). С помощью теоремы о компактности покажите, что для всякого поля K существует его надполе K' такое, что каждый неконстантный многочлен с коэффициентами из K имеет корень в K'.

$\boxed{\textbf{ML 48.}}$ Докажите, что если формула φ верна в алгебраически замкнутом поле в характеристикой 0, то найдется p_o, что для любого $p > p_o$ формула φ будет верна в алгебраически замкнутом поле с характеристикой p.

$\boxed{\textbf{ML 49.}}$ Будет ли теория $\mathrm{Th}((\mathbb{Z},<,=))$ конечно аксиоматизируемой.

$\boxed{\textbf{ML 50.}}$ Будет ли теория $\mathrm{Th}((\mathbb{N},<,=))$ конечно аксиоматизируемой.

$\boxed{\textbf{ML 51.}}$ Докажите, что:

(а) в интерпретации ($\mathbb{Q},=,<,+$, рациональные константы) допустима элиминация кванторов;

(б) интерпретации ($\mathbb{Q},=,<,+$, рациональные константы) и ($\mathbb{R},=,<,+$, рациональные константы) элементарно эквивалентны;

(в) если единичный квадрат разрезан на несколько меньших квадратов, то все они имеют рациональные стороны (подсказка: используйте предыдущие пункты и покажите единственность решения системы уравнений).

$\boxed{\textbf{ML 21.}}$ Докажите, что существует: счетное число не пересекающихся перечислимых множеств, никакие два из которых нельзя отделить разрешимым.

$\boxed{\textbf{ML 23.}}$

Задача Поста состоит в следующем: есть доминошки n видов $\left[\frac{s_1}{t_1}\right]$, $\left[\frac{s_n}{t_n}\right]$, s_i и t_i — конечные строки, есть неограниченный запас доминошек каждого вида, доминошки переворачивать нельзя. Требуется определить, можно ли составить несколько доминошек так, чтобы в верхней и нижней их половине читалась одна и та же строка, такие последовательности доминошек будем называть согласованными. Докажите, что задача Поста алгоритмически неразрешима.

$\boxed{\textbf{ML 33.}}$ Теперь секвенцией будем называть $\Gamma \vdash \Delta$, где Γ и Δ — это списки предикатных формул.

Добавим в секвенциальное счисление четыре новых правила которые соответствуют кванторам (см. табличку).

В правилах $(\forall\vdash)$ и $(\vdash\exists)$, $A(t/x)$ обозначает, что в формуле A переменная x заменяется на терм t, при этом для каждого вхождения переменной x никакие переменные терма t не должны попасть в область действия кванторов по одноименным переменным (в формуле A). Например для формулы $\forall y\ P(x, y)$ вместо x нельзя подставить $f(y)$.

А в других двух правилах $A(y/x)$ означает, что в формуле A мы заменили все вхождения x на переменную y, при этом переменная y должна быть свежей то есть не входить ни в A, ни в другие формулы из секвенции.

Докажите корректность секвенциального исчисления (покажите, что если секвенция $\Gamma \vdash \Delta$ выводима, то в любой интерпретации либо хотя бы одна формула из Γ ложна, либо хотя бы одна формула из Δ истинна).

$\boxed{\textbf{ML 39.}}$ Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов $(\mathbb{Q}, =, S)$, где S — прибавление единицы? Если нет, то можно ли добавить какой-нибудь выразимый предикат так, чтобы с новым предикатом элиминация кванторов стала возможной.

$\boxed{\textbf{ML 40.}}$ Пусть T — замкнутая формула в некоторой сигнатуре, и пусть существует интерпретация со сколь угодно большим носителем, в которой данная формула истинна. Докажите, что существует интерпретация с бесконечным носителем, в которой данная формула истинна.