

Листок 1. Схемная сложность.

COMP2 1. Рассмотрим функцию $\text{Maj} : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, которая выдает 1, если не менее половины входных битов равны 1. Докажите, что существует:

- (а) схема
- (б) монотонная схема
- (в) монотонная формула полиномиального размера, вычисляющая функцию Maj .

COMP2 2. Докажите, что для любой симметрической булевой функции (симметрическая функция зависит только от числа единиц во входе) существует вычисляющая ее

- (а) схема
- (б) монотонная схема полиномиального размера.

COMP2 3. Докажите, что любая формула в КНФ (ДНФ), которая вычисляет функцию

- (а) $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \bmod 2$;
- (б) $\text{Maj}(x_1, \dots, x_n)$ имеет экспоненциальный размер.

COMP2 4. Докажите, что существует формула от \wedge, \vee, \neg размера $O(n^2)$, которая вычисляет функцию $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \bmod 2$.

COMP2 5. Докажите, что функция Maj не может быть вычислена при помощи схем полиномиального размера константной глубины из гейтов \wedge, \vee, \neg .