

Домашняя работа 10. Паросочетания.

Необходимо набрать 4 балла.

СОМВ 120. (1 балл) Найдите минимальный пример двудольного графа, в котором существует паросочетание, наибольшее по включению, не являющееся максимальным.

СОМВ 121. (1,5 балла) Определить минимальный размер наибольшего по включению паросочетания в простом цикле C_{11} , построенном на одиннадцати вершинах. Чему будет равен этот размер в случае произвольного простого цикла C_n ?

СОМВ 122. (1,5 балла) Доказать, что в любом графе G размер наибольшего по включению паросочетания содержит по меньшей мере $\alpha'(G)/2$ ребер, где $\alpha'(G)$ — количество ребер в максимальном паросочетании.

СОМВ 123. (1,5 балла) Рассмотрим следующую игру на графе G : два игрока поочередно выбирают вершины x_1, x_2, \dots, x_n графа так, чтобы вершина x_{i+1} была бы смежной с вершиной x_i ; тот из игроков, кто не сможет выбрать новую вершину по этим правилам, проигрывает. Доказать, что первый игрок имеет выигрышную стратегию тогда и только тогда, когда в G отсутствует совершенное паросочетание.

СОМВ 124. (1 балл) Пусть S есть подмножество множества $V(G)$ вершин графа G , покрытое некоторым паросочетанием M . Доказать, что некоторое максимальное паросочетание также покрывает все вершины этого множества. Верно ли, что данный факт будет выполняться для любого максимального паросочетания?