

Домашняя работа 3. Рекуррентные соотношения и графы.

Необходимо набрать 6 баллов.

COMB 27. (1,5 балла) Построить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + \sin(n\pi/2)$.

COMB 28. (1 балл) В теннисном турнире участвуют $2n$ игроков. Составить и решить рекуррентное соотношение для количества a_n различных пар, которые можно сформировать для n матчей первого круга.

COMB 29. (1 балл) На плоскости нарисованы n окружностей так, что любая пара окружностей пересекается ровно по двум точкам, и никакие три окружности не имеют общей точки пересечения. Определить количество a_n областей, на которые разбивается плоскость такими окружностями.

COMB 30. (3 балла) Доказать, что числа Фибоначчи F_n удовлетворяют следующим соотношениям:

(а) $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$;

(б) $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$;

(в) $F_1^2 + \dots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$.

COMB 31. (2 балла) Докажите, что $\gcd(F_n, F_m) = F_{\gcd(n,m)}$, где $\gcd(a, b)$ — это наибольший общий делитель a и b .

COMB 32. (1 балл) Пусть в графе G ровно две вершины имеют нечетную степень. Доказать, что в они являются связанными.

COMB 33. (1 балл) Описать все графы на n вершинах, для которых любая n -перестановка является автоморфизмом.