

Домашняя работа 6. Эйлеровы и Гамильтоновы графы.

Необходимо набрать 6 баллов.

СОМВ 70. (2 балла) Предположим, что мы удалили ребро $e = \{x, y\}$ в эйлеровом графе G . Доказать, что количество реберно не повторяющихся путей в графе $G' = G - e$, из x в y , нечетно. Кроме того, показать, что среди всех этих путей количество путей, не являющихся простыми, четно.

СОМВ 71. (1,5 балла) Пусть в графе G имеется вершина x нечетной степени. Доказать, что среди инцидентных x ребер найдется ребро e , для которого количество различных циклов, проходящих через e , четно.

СОМВ 72. (1 балл). С использованием двух предыдущих упражнений доказать справедливость еще одной характеристики эйлерова графа: нетривиальный связный граф G является эйлеровым тогда и только тогда, когда каждое его ребро e принадлежит нечетному количеству циклов в G .

СОМВ 73. (2,5 балла) Возможно ли удалить в графе Петерсена ребра так, чтобы в полученном в результате удаления этих ребер графе G существовал эйлеров цикл и G был связан?

СОМВ 74. (2,5 балла) Обозначим через $h(D)$ количество гамильтоновых путей в простом орграфе D . Доказать, что для орграфа D и орграфа \bar{D} , являющегося дополнением к D до полного орграфа, построенного на n вершинах (то есть орграфа, в котором любые две вершины соединены между собой парой разнонаправленных ребер), справедливо равенство $h(D) \equiv h(\bar{D}) \pmod{2}$.