Домашняя работа 8. Связность.

Необходимо набрать 6 баллов.

COMB 92. (2 балла). Построить наименьший 3-регулярный граф G, для которого $\kappa(G) = 1$. Доказать, что построенный граф действительно является минимальным.

COMB 93. (2 балла) Возьмем четное количество n вершин и расставим их равномерно по кругу. Зафиксируем некоторое четное натуральное число $k < n$ и проведем из любой вершины k ребер, соединив эту вершину с $k/2$ вершинами слева по кругу от нее и с $k/2$ вершинами справа по кругу от нее. В результате получим k-регулярный граф, построенный на n вершинах. Доказать, что для такого графа $\kappa(G) = k$.

COMB 94. (1,5 балла) Пусть G есть простой связный граф, в котором $\delta(G) \geq (n + k - 2)/2$, где n - количество вершин в графе, $n \geq k + 1$. Доказать, что в этом случае G является k-связным графом, то есть что $\kappa(G) \geq k$.

COMB 95. (1,5 балла) Пусть G есть произвольный простой граф, S - произвольное собственное подмножество множества $V(G)$ вершин этого графа. Показать, что в случае $|\partial(S)| < \delta(G)$ мощность $|S|$ подмножества S строго больше $\delta(G)$.

COMB 96. (2,5 балла) Пусть G есть простой связный граф, диаметр которого равен двум, а $[S, \bar{S}]$ ($|S| \leq |\bar{S}|$) — это минимальный реберный разрез (по чсилу ребер) в этом графе. Доказать, что любая вершина $x \in S$ имеет хотя бы одну смежную с ней вершину $y \in \bar{S}$. Используя этот факт, показать, что в таком графе $\lambda(G) = \delta(G)$.

COMB 97. (1 балл) Пусть у нас задана тройка натуральных чисел $\kappa < \lambda < \delta$. Привести алгоритм построения графа G, у которого $\kappa(G) = \kappa$, $\lambda(G) = \lambda$, а $\delta(G) = \delta$.