Домашняя работа 9. Связность.

Необходимо набрать 6 баллов.

COMB 106. (1,5 балла) Доказать, что для любого 3-регулярного простого графа G реберная и вершиная связность совпадают.

COMB 107. (1 балл) Доказать, что односвязный граф G является реберно k-связным тогда и только тогда, когда любой блок B_i такого графа реберно k-связный.

COMB 108. (1,5 балла) Доказать, что граф G является реберно двусвязным тогда и только тогда, когда его можно представить в виде $G = G_0 \cup G_1 \cup \cdots \cup G_k$, где G_0 — произвольный цикл в графе G, а G_i, i $>$ 0, представляет собой либо ручку, либо замкнутую ручку для подграфа $G_0 \cup G_1 \cup \cdots \cup G_{i-1}$ графа G.

COMB 109. (1 балл) Доказать, что простой граф G, построенный на трёх или более вершинах, двусвязен тогда и только тогда, когда для любой тройки различных вершин (x, y, z) в G есть простой путь из x в z, проходящий через y.

COMB 110. (1,5 балла) Пусть G вершинно k-связен. Образуем из G новый граф G' путём добавления к G новой вершины y и не менее k рёбер из y в k различных вершин графа G. Доказать, что G' также k-связен.

COMB 111. (1,5 балла). Назовем k-веером из вершины x в множество Y набор из k путей, начинающихся в x, заканчивающихся в Y, и не имеющих никаких общих вершин, кроме вершины x. Пусть G есть k-связный граф, x — некоторая его вершина, а Y — набор из не менее чем k вершин графа G, не включающий x. Доказать, что тогда существует k-веер из x в Y.

COMB 112. (1 балл). Доказать, что любой k-связный граф G, построенный на $n \geq 2k$ вершинах, $k \geq 2$, содержит цикл C, длина которого больше или равна $2k$.