Практика 12. Паросочетания и покрытия.

$\boxed{\textbf{COMB 136.}}$ Имеется колода из $n{\cdot}m$ карт, по одной карте для каждого значения масти из $[m]$ и для каждого значения достоинства из $[n]$. Мы раскладываем эти карты в m рядов, каждый из которых содержит ровно n карт. Доказать, что при любой раскладке этих карт можно всегда найти m карт разных мастей, никакие две из которых не лежат в одном и том же столбце.

$\boxed{\textbf{COMB 137.}}$ В двудольном графе $G[X, Y]$ обозначим через $\mathrm{def}(S)$, $S \subseteq X$, разность между $|S|$ и $|N(S)|$. По определению положим $\mathrm{def}(\emptyset) = 0$. Доказать, что в двудольном графе $G[X, Y]$ существует паросочетание M, состоящее хотя бы из $|X| - d$ ребер, где $d := \max_{S \subset X} \mathrm{def}(S)$.

$\boxed{\textbf{COMB 138.}}$ Предположим, что размер максимального паросочетания в простом двудольном графе G меньше заданного числа k. Известно также, что в таком графе отсутствует звезда, построенная на l ребрах. Получить верхнюю оценку на количество $|E(G)|$ ребер в этом графе через числа k и l.

$\boxed{\textbf{COMB 139.}}$ Цепью в частично упорядоченном множестве P называется такое подмножество P_1 множества P, любые два элемента которого сравнимы между собой, а антицепью — подмножество $A \subset P$, любые два элемента которого не сравнимы между собой. С помощью теоремы Кёнига-Эгервари доказать теорему Дилуорса, утверждающую, что в любом конечном частично упорядоченном множестве P минимальное количество k попарно непересекающихся цепей P_i, $i = 1, \ldots, k$, покрывающих все элементы множества P, равно максимальному количеству а элементов в антицепи A.