

Дискретная математика

Глава 4. Разбиения чисел

А. В. Пастор

17.10.2023

Упорядоченные и неупорядоченные разбиения

Определение

- *Разбиением* натурального числа n на m слагаемых называется представление n в виде $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, где $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{N}$.
- Разбиения называются *упорядоченными*, если порядок слагаемых имеет значение, и *неупорядоченными* в противном случае.

Пример

Есть три упорядоченных разбиения числа 4 на три слагаемых:

$$4 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2.$$

Но неупорядоченное разбиение только одно.

Замечание

- Строго говоря, упорядоченное разбиение — это последовательность натуральных чисел (x_1, x_2, \dots, x_m) , сумма членов которой равна n .
- Неупорядоченное разбиение — это класс эквивалентности, где эквивалентными считаются последовательности, отличающиеся лишь порядком членов.

Упорядоченные разбиения

Теорема

1. Количество упорядоченных разбиений числа n на m слагаемых равно C_{n-1}^{m-1} .
2. Количество упорядоченных разбиений числа n равно 2^{n-1} .

Доказательство.

1. Нужно найти количество натуральных решений уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$.
 - Выложим в ряд n шариков и расставим между ними $m - 1$ перегородку.
 - Это можно сделать C_{n-1}^{m-1} способами.
 - Шарiki разобьются на m групп: пусть в i -й группе x_i шариков.
 - Получаем биекцию между решениями и расстановками перегородок.
2. $\sum_{m=1}^n C_{n-1}^{m-1} = 2^{n-1}$. □

Упорядоченные разбиения и числа Фибоначчи

Определение

Числа Фибоначчи — это последовательность F_n , задаваемая следующими условиями: $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ при $n > 1$.

Теорема

Количество упорядоченных разбиений числа n на нечетные слагаемые равно F_n .

Доказательство. Индукция по n .

База: при $n = 1$ и $n = 2$ утверждение очевидно.

Переход ($n - 1, n \rightarrow n + 1$): Пусть $n + 1 = x_1 + \dots + x_{m-1} + x_m$ — разбиение на нечетные слагаемые.

► Рассмотрим два случая: $x_m = 1$ и $x_m \geq 3$.

1° $x_m = 1$. Тогда $n = x_1 + \dots + x_{m-1}$. Таких разбиений F_n .

2° $x_m \geq 3$. Тогда $n - 1 = x_1 + \dots + x_{m-1} + (x_m - 2)$. Таких разбиений F_{n-1} .

► Итого, получаем $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ разбиений. □

Неупорядоченные разбиения и диаграммы Юнга

Определение

- $p_m(n)$ — количество неупорядоченных разбиений числа n на m слагаемых;
- $p(n)$ — количество неупорядоченных разбиений числа n .

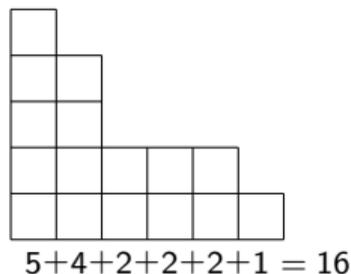
Стандартная форма записи

Слагаемые неупорядоченного разбиения обычно записывают в невозрастающем порядке:

$$n = x_1 + \dots + x_m, \quad \text{где } x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_m > 0.$$

Диаграммы Юнга

- Каждому разбиению числа n соответствует следующая диаграмма из n клеток.
- Столбцы диаграммы соответствуют слагаемым. Количество столбцов равно m .



Еще один способ записи разбиения

Теорема

1. Количество решений уравнения $t_1 + 2t_2 + 3t_3 + \dots + nt_n = n$ (1) в целых неотрицательных числах равно $p(n)$.
2. Количество решений уравнения (1), удовлетворяющих условию $t_1 + \dots + t_n = m$, равно $p_m(n)$.

Доказательство. Пусть $n = x_1 + \dots + x_m$ — разбиение числа n .

- Обозначим через t_k количество слагаемых в этом разбиении, равных k .
- Получим решение уравнения (1).
- Аналогично, каждому решению (t_1, t_2, \dots, t_n) уравнения (1) соответствует разбиение n , в котором ровно t_k слагаемых, равных k .
- При этом, количество слагаемых в разбиении будет равно $t_1 + \dots + t_n$. \square

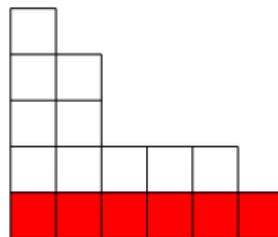
Рекуррентная формула для числа разбиений

Теорема

$$p_m(n) = p_m(n - m) + p_{m-1}(n - m) + \dots + p_1(n - m).$$

Доказательство.

- Рассмотрим диаграмму Юнга с n клетками и m столбцами.
- Удалим нижнюю строку.
- Получим диаграмму с $n - m$ клетками и $k \leq m$ столбцами.



Следствие 1

Количество неупорядоченных разбиений числа $n - m$ на не более чем m слагаемых равно $p_m(n)$.

Рекуррентная формула для числа разбиений

Следствие 2

$$p_m(n) = p_m(n - m) + p_{m-1}(n - 1).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} p_m(n) &= p_m(n - m) + (p_{m-1}(n - m) + \dots + p_1(n - m)) = \\ &= p_m(n - m) + p_{m-1}(n - 1). \end{aligned}$$

□

Замечание

- Отметим, что $p_1(n) = 1$ при всех n .
- При помощи доказанных выше рекуррентных соотношений, можно получить явные формулы для $p_m(n)$ при малых m .
- Мы сделаем это для $m = 2$ и $m = 3$.

Явные формулы для малых m

Определение

Пусть $x \in \mathbb{R}$.

- Через $[x]$ обозначается **целая часть** числа x , т. е, наибольшее целое число, не превосходящее x .
- Через $\{x\}$ обозначается **дробная часть** числа x , т. е, $\{x\} \stackrel{\text{def}}{=} x - [x]$.

Теорема (де Морган)

1. $p_2(n) = \left[\frac{n}{2} \right]$;
2. $p_3(n) = \left[\frac{n^2+3}{12} \right]$.

Доказательство. Индукция по n .

1. База: при $n = 1$ и $n = 2$ утверждение очевидно.

Переход ($n - 2 \rightarrow n$):

$$p_2(n) = p_2(n - 2) + p_1(n - 1) = \left[\frac{n-2}{2} \right] + 1 = \left[\frac{n-2}{2} + 1 \right] = \left[\frac{n}{2} \right].$$

Явные формулы для малых m

2. База: при $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$ утверждение очевидно.

Переход ($n - 3 \rightarrow n$):

$$\begin{aligned}p_3(n) &= p_3(n - 3) + p_2(n - 1) = \\&= \left[\frac{(n-3)^2+3}{12} \right] + \left[\frac{n-1}{2} \right] = \\&= \left[\frac{(n^2-6n+12)+(6n-6)}{12} \right] = \\&= \left[\frac{n^2+6}{12} \right] = \\&= \left[\frac{n^2+3}{12} \right].\end{aligned}$$

- Нужно проверить подсвеченные красным равенства.
- Для проверки первого из них, нам понадобится следующая лемма.

Лемма

$$[x] + [y] = [x + y] \Leftrightarrow \{x\} + \{y\} < 1.$$

Доказательство.

$$x + y = ([x] + \{x\}) + ([y] + \{y\}) = ([x] + [y]) + (\{x\} + \{y\}).$$

□

Явные формулы для малых m

Вернемся к доказательству теоремы.

- Здесь мы будем пользоваться тем, что точный квадрат может быть сравним только с 0 или 1 по модулям 3 и 4.

$$2.1. \left[\frac{(n-3)^2+3}{12} \right] + \left[\frac{n-1}{2} \right] = \left[\frac{(n^2-6n+12)+(6n-6)}{12} \right].$$

Нужно доказать, что $\left\{ \frac{(n-3)^2+3}{12} \right\} + \left\{ \frac{n-1}{2} \right\} < 1$.

- При $n \not\equiv 2 \pmod{2}$: $\left\{ \frac{n-1}{2} \right\} = 0$ и $\left\{ \frac{(n-3)^2+3}{12} \right\} < 1$.
- При $n \equiv 2 \pmod{2}$: пусть $n = 2k$, тогда $\left\{ \frac{n-1}{2} \right\} = \frac{1}{2}$ и $\left\{ \frac{(n-3)^2+3}{12} \right\} = \left\{ \frac{4k^2-12k+12}{12} \right\} = \left\{ \frac{k^2}{3} \right\} \leq \frac{1}{3}$.

$$2.2. \left[\frac{n^2+6}{12} \right] = \left[\frac{n^2+3}{12} \right].$$

Нужно доказать, что числа $\frac{n^2+4}{12}$, $\frac{n^2+5}{12}$, $\frac{n^2+6}{12}$ не целые.

- Но $n^2 + 4 \not\equiv 3 \pmod{3}$, т. к. $n^2 \not\equiv 2 \pmod{3}$;
- $n^2 + 5 \not\equiv 3 \pmod{4}$, т. к. $n^2 \not\equiv 3 \pmod{4}$;
- $n^2 + 6 \not\equiv 2 \pmod{4}$, т. к. $n^2 \not\equiv 2 \pmod{4}$.



О явной формуле в общем случае

Теорема

- $p_m(n) = \frac{n^{m-1}}{(m-1)!m!} + c_{m-2}(m, n)n^{m-2} + \dots + c_1(m, n)n + c_0(m, n)$, где коэффициенты $c_k(m, n)$ зависят только от класса вычетов n по модулю $m!$.
- В частности, если $n \equiv n_0 \pmod{m!}$ при фиксированном n_0 , то $p_m(n)$ является многочленом степени $m - 1$ от переменной n . (б/д)

Замечание

- Вспомним, что количество упорядоченных разбиений числа n на m слагаемых равно C_{n-1}^{m-1} .
- При фиксированном m это также многочлен от n со старшим членом $\frac{n^{m-1}}{(m-1)!}$.
- Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_m(n)}{C_{n-1}^{m-1}} = \frac{1}{m!}$.
- Это означает, что “почти все” разбиения n на m слагаемых состоят из различных слагаемых.

Разбиения на различные слагаемые

Теорема

Количество разбиений числа n на m различных слагаемых равно $p_m\left(n - \frac{m(m-1)}{2}\right)$.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$.
- Рассмотрим числа $y_i = x_i - m + i$.
 - ▶ $y_i - y_{i+1} = (x_i - m + i) - (x_{i+1} - m + i + 1) = x_i - x_{i+1} - 1 \geq 0$;
 - ▶ следовательно, $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_m = x_m > 0$;
 - ▶ $y_1 + y_2 + \dots + y_m =$
 $= x_1 + x_2 + \dots + x_m - ((m-1) + (m-2) + \dots + 1) = n - \frac{m(m-1)}{2}$.
- Итак, каждому разбиению n на m различных слагаемых поставили в соответствие разбиение $n - \frac{m(m-1)}{2}$ на m слагаемых.
- Очевидно, что это биекция. □

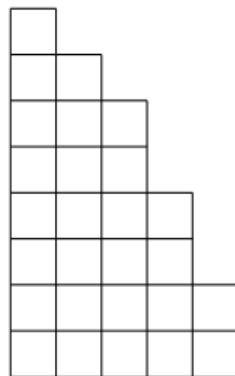
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
 - ▶ Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем x_1, \dots, x_ℓ на 1.
 - ▶ Если $k < \ell$, уменьшаем x_1, \dots, x_k на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- **Проблема:** $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
 - ▶ При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
 - ▶ При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. □



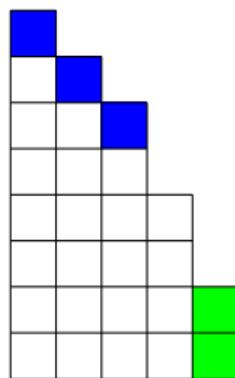
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
 - ▶ Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем x_1, \dots, x_ℓ на 1.
 - ▶ Если $k < \ell$, уменьшаем x_1, \dots, x_k на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- **Проблема:** $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
 - ▶ При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
 - ▶ При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. □



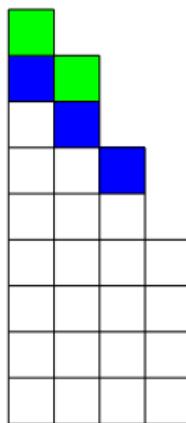
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
 - ▶ Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем x_1, \dots, x_ℓ на 1.
 - ▶ Если $k < \ell$, уменьшаем x_1, \dots, x_k на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- **Проблема:** $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
 - ▶ При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
 - ▶ При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. □



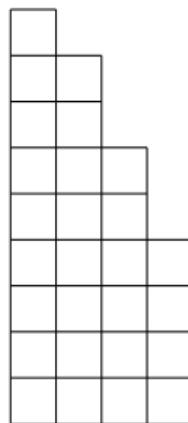
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
 - ▶ Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем x_1, \dots, x_ℓ на 1.
 - ▶ Если $k < \ell$, уменьшаем x_1, \dots, x_k на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- **Проблема:** $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
 - ▶ При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
 - ▶ При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. □



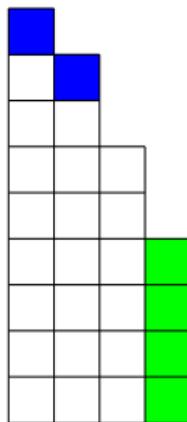
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
 - ▶ Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем x_1, \dots, x_ℓ на 1.
 - ▶ Если $k < \ell$, уменьшаем x_1, \dots, x_k на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- **Проблема:** $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
 - ▶ При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
 - ▶ При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. □



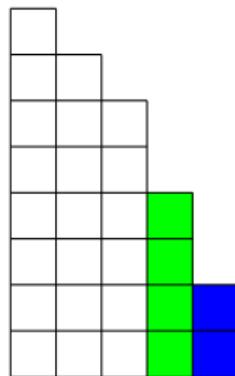
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
 - ▶ Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем x_1, \dots, x_ℓ на 1.
 - ▶ Если $k < \ell$, уменьшаем x_1, \dots, x_k на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- **Проблема:** $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
 - ▶ При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
 - ▶ При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. □



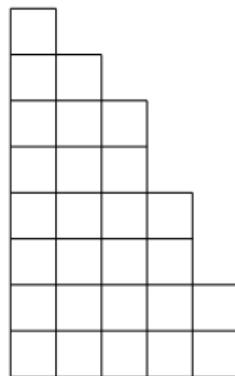
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
 - ▶ Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем x_1, \dots, x_ℓ на 1.
 - ▶ Если $k < \ell$, уменьшаем x_1, \dots, x_k на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- **Проблема:** $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
 - ▶ При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
 - ▶ При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. □



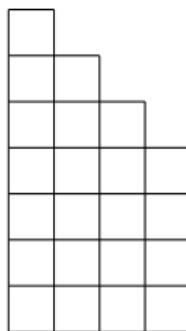
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
 - ▶ Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем x_1, \dots, x_ℓ на 1.
 - ▶ Если $k < \ell$, уменьшаем x_1, \dots, x_k на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- **Проблема:** $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
 - ▶ При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
 - ▶ При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. □



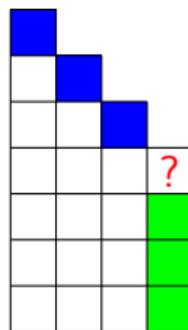
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
 - ▶ Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем x_1, \dots, x_ℓ на 1.
 - ▶ Если $k < \ell$, уменьшаем x_1, \dots, x_k на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- **Проблема:** $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
 - ▶ При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
 - ▶ При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. □



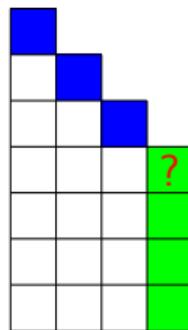
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
 - ▶ Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем x_1, \dots, x_ℓ на 1.
 - ▶ Если $k < \ell$, уменьшаем x_1, \dots, x_k на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- **Проблема:** $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
 - ▶ При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
 - ▶ При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. □



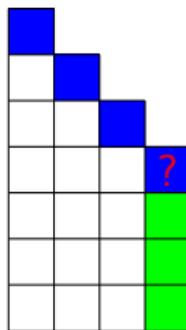
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
 - ▶ Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем x_1, \dots, x_ℓ на 1.
 - ▶ Если $k < \ell$, уменьшаем x_1, \dots, x_k на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- **Проблема:** $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
 - ▶ При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
 - ▶ При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. □



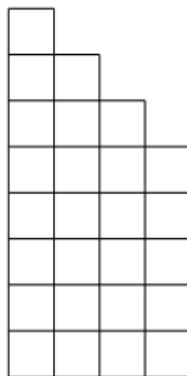
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
 - ▶ Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем x_1, \dots, x_ℓ на 1.
 - ▶ Если $k < \ell$, уменьшаем x_1, \dots, x_k на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- **Проблема:** $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
 - ▶ При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
 - ▶ При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. □



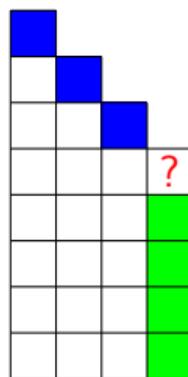
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
 - ▶ Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем x_1, \dots, x_ℓ на 1.
 - ▶ Если $k < \ell$, уменьшаем x_1, \dots, x_k на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- **Проблема:** $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
 - ▶ При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
 - ▶ При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. □



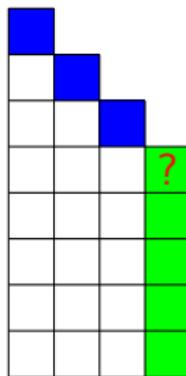
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
 - ▶ Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем x_1, \dots, x_ℓ на 1.
 - ▶ Если $k < \ell$, уменьшаем x_1, \dots, x_k на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- **Проблема:** $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
 - ▶ При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
 - ▶ При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. □



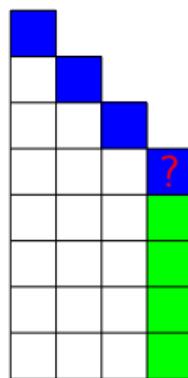
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
 - ▶ Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем x_1, \dots, x_ℓ на 1.
 - ▶ Если $k < \ell$, уменьшаем x_1, \dots, x_k на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- **Проблема:** $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
 - ▶ При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
 - ▶ При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. □



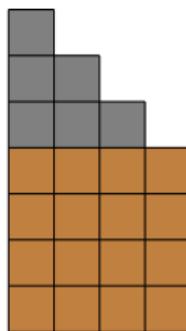
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
 - ▶ Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем x_1, \dots, x_ℓ на 1.
 - ▶ Если $k < \ell$, уменьшаем x_1, \dots, x_k на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- **Проблема:** $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
 - ▶ При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
 - ▶ При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. □



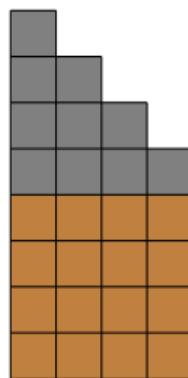
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
 - ▶ Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем x_1, \dots, x_ℓ на 1.
 - ▶ Если $k < \ell$, уменьшаем x_1, \dots, x_k на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- **Проблема:** $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
 - ▶ При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
 - ▶ При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. □



О многоугольных числах

Почему предыдущая теорема называется **пентагональная формула Эйлера**?

- Дело в том, что числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 - k)$ — это так называемые **пятиугольные числа**.
- Формально, k -е пятиугольное число — это сумма первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 3:
$$\frac{1}{2}(3k^2 - k) = 1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2).$$
- Эти числа имеют геометрическое представление в виде числа точек в пятиугольнике.
- Числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 + k)$ получаются похожим образом:
$$\frac{1}{2}(3k^2 + k) = 2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1),$$
 но для них нет столь красивого геометрического представления.
- Аналогично, n -угольные числа — это суммы первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью $n - 2$.
- Наиболее известны треугольные числа:
$$\frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + k.$$

•

$$\frac{1}{2}(3 \cdot 1^2 - 1) = 1.$$

О многоугольных числах

Почему предыдущая теорема называется **пентагональная формула Эйлера**?

- Дело в том, что числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 - k)$ — это так называемые **пятиугольные числа**.

- Формально, k -е пятиугольное число — это сумма первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 3:

$$\frac{1}{2}(3k^2 - k) = 1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2).$$

- Эти числа имеют геометрическое представление в виде числа точек в пятиугольнике.

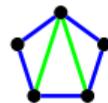
- Числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 + k)$ получаются похожим образом:

$\frac{1}{2}(3k^2 + k) = 2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1)$, но для них нет столь красивого геометрического представления.

- Аналогично, n -угольные числа — это суммы первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью $n - 2$.

- Наиболее известны треугольные числа:

$$\frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + k.$$



$$\frac{1}{2}(3 \cdot 2^2 - 1) = 1 + 4.$$

О многоугольных числах

Почему предыдущая теорема называется **пентагональная формула Эйлера**?

- Дело в том, что числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 - k)$ — это так называемые **пятиугольные числа**.

- Формально, k -е пятиугольное число — это сумма первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 3:

$$\frac{1}{2}(3k^2 - k) = 1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2).$$

- Эти числа имеют геометрическое представление в виде числа точек в пятиугольнике.

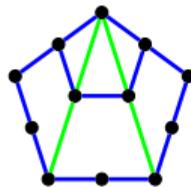
- Числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 + k)$ получаются похожим образом:

$\frac{1}{2}(3k^2 + k) = 2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1)$, но для них нет столь красивого геометрического представления.

- Аналогично, n -угольные числа — это суммы первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью $n - 2$.

- Наиболее известны треугольные числа:

$$\frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + k.$$

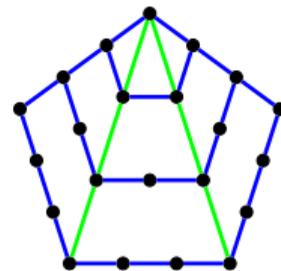


$$\frac{1}{2}(3 \cdot 3^2 - 1) = 1 + 4 + 7.$$

О многоугольных числах

Почему предыдущая теорема называется **пентагональная формула Эйлера**?

- Дело в том, что числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 - k)$ — это так называемые **пятиугольные числа**.
- Формально, k -е пятиугольное число — это сумма первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 3:
$$\frac{1}{2}(3k^2 - k) = 1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2).$$
- Эти числа имеют геометрическое представление в виде числа точек в пятиугольнике.
- Числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 + k)$ получаются похожим образом:
$$\frac{1}{2}(3k^2 + k) = 2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1),$$
 но для них нет столь красивого геометрического представления.
- Аналогично, n -угольные числа — это суммы первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью $n - 2$.
- Наиболее известны треугольные числа:
$$\frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + k.$$

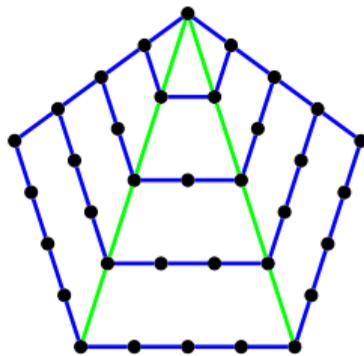


$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(3 \cdot 4^2 - 1) &= \\ &= 1 + 4 + 7 + 10. \end{aligned}$$

О многоугольных числах

Почему предыдущая теорема называется **пентагональная формула Эйлера**?

- Дело в том, что числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 - k)$ — это так называемые **пятиугольные числа**.
- Формально, k -е пятиугольное число — это сумма первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 3:
$$\frac{1}{2}(3k^2 - k) = 1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2).$$
- Эти числа имеют геометрическое представление в виде числа точек в пятиугольнике.
- Числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 + k)$ получаются похожим образом:
$$\frac{1}{2}(3k^2 + k) = 2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1),$$
 но для них нет столь красивого геометрического представления.
- Аналогично, n -угольные числа — это суммы первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью $n - 2$.
- Наиболее известны треугольные числа:
$$\frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + k.$$

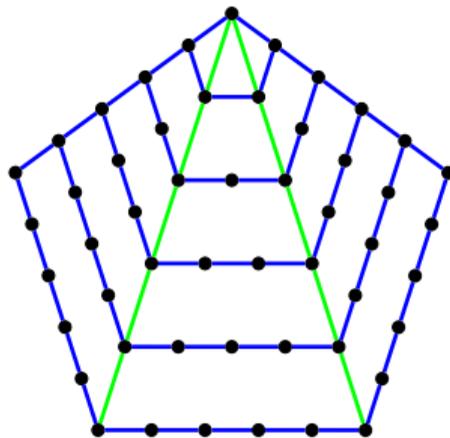


$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(3 \cdot 5^2 - 1) &= \\ &= 1 + 4 + 7 + 10 + 13. \end{aligned}$$

О многоугольных числах

Почему предыдущая теорема называется **пентагональная формула Эйлера**?

- Дело в том, что числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 - k)$ — это так называемые **пятиугольные числа**.
- Формально, k -е пятиугольное число — это сумма первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 3:
$$\frac{1}{2}(3k^2 - k) = 1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2).$$
- Эти числа имеют геометрическое представление в виде числа точек в пятиугольнике.
- Числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 + k)$ получаются похожим образом:
$$\frac{1}{2}(3k^2 + k) = 2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1),$$
 но для них нет столь красивого геометрического представления.
- Аналогично, n -угольные числа — это суммы первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью $n - 2$.
- Наиболее известны треугольные числа:
$$\frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + k.$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(3 \cdot 6^2 - 1) &= \\ &= 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16. \end{aligned}$$

Асимптотические оценки числа $p(n)$

Теорема (формула Харди–Рамануджана)

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2/3}\sqrt{n}} \quad (\text{б/д}).$$

Замечание

Есть и формулы, дающие более точное приближение числа $p(n)$, чем теорема Харди-Рамануджана. Например, те же авторы доказали также следующую формулу:

$$p(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \left(\frac{e^{C\lambda_n}}{\lambda_n} \right) + O(e^{D\sqrt{n}}),$$

где $C = \pi\sqrt{2/3}$, $\lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}$ и D — любое число, большее $\frac{1}{2}C$ (б/д).