Вопросы по курсу дискретной математики. 2023-24 г, 1 семестр

I. Множества и отображения

1. Основные понятия теории множеств: множество, элемент, подмножество. Основные операции над множествами.

2. Бинарные и n-арные отношения. Определения и примеры. Основные свойства отношений. Отношение эквивалентности. Отношение порядка.

3. Понятие отображения. Образ и прообраз элемента. Инъекция, сюръекция и биекция. Композиция отображений. Обратное отображение. Критерий обратимости.

4. Число элементов декартова произведения двух и нескольких множеств. Количество подмножеств данного множества.

5. Число отображений из одного множества в другое. Число инъекций. Число перестановок данного множества. Размещения и размещения с повторениями.

6. Счётные множества. Определение и примеры. Счётность декартова произведения счётных множеств.

7. Теорема о бесконечном подмножестве счётного множества. Понятие не более чем счётного множества и их основные свойства.

8. Счётность множества рациональных чисел.

9. Теорема об объединении не более чем счётных множеств.

10. Пример несчётного множества. Существование трансцендентных чисел.

11. Понятие мощности множества. Теорема о счётном подмножестве бесконечного множества.

12. Формулировка аксиомы выбора. Примеры теорем, которые невозможно доказать без использования этой аксиомы.

13. Следствия об объединении и разности бесконечного множества и счётного множества. Примеры множеств мощности континуума.

14. Сравнение мощностей. Определение, теорема Кантора-Бернштейна (формулировка), континуум-гипотеза. Теорема Кантора о мощности множества всех подмножеств.

II. Основы математической логики

15. Булевы функции. Определение, задание таблицей истинности, количество булевых функций от n переменных. Примеры булевых функций от 1 и 2 переменных.

16. Формулы исчисления высказываний. Связь с булевыми функциями. Эквивалентность формул, примеры. Тавтологии, выполнимые формулы и противоречия.

17. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы. СКНФ и СДНФ. Существование и единственность представления булевой функции в виде СКНФ и СДНФ. Полные системы булевых функций.

18. Алгоритм приведения булевой функции к СКНФ и СДНФ эквивалентными заменами.

19. Аксиомы и правила вывода в исчислении высказываний. Пример логического вывода.

20. Язык исчисления предикатов. Термы и формулы исчисления предикатов. Свободные и связанные вхождения переменных.

21. Интерпретация формул исчисления предикатов. Общезначимые и выполнимые формулы.

III. Элементарная комбинаторика

22. Число сочетаний из n элементов по k. Формула для числа сочетаний.

23. Число сочетаний с повторениями из n элементов по k. Формула для числа сочетаний с повторениями.

24. Простейшие свойства биномиальных коэффициентов. Алгебраические и комбинаторные доказательства. Треугольник Паскаля.

25. Бином Ньютона. Сумма и знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов (алгебраические и комбинаторные доказательства).

26. Мультиномиальные коэффициенты. Определение и формула. Обобщенный бином Ньютона.

27. Формула включений-исключений. Переформулировка этой формулы в терминах свойств.

28. Субфакториалы. Определение и рекуррентное соотношение для субфакториалов. Связь с обычными факториалами.

29. Явная формула для субфакториала. Следствие о ближайшем целом числе к $\frac{n!}{e}$.

30. Функция Эйлера. Определение и формула (доказательство с помощью формулы включений-исключений).

31. Формула для числа сюръекций.

IV. Разбиения чисел

32. Упорядоченные и неупорядоченные разбиения. Формула для числа упорядоченных разбиений.

33. Упорядоченные разбиения на нечетные слагаемые.

34. Неупорядоченные разбиения. Связь с диаграммами Юнга. Запись в виде решений специального уравнения.

35. Рекуррентная формула для числа разбиений на фиксированное число слагаемых.

36. Явные формулы для числа разбиений на 2 и 3 слагаемых.

37. Формула для количества разбиений числа n на m различных слагаемых.

38. Пентагональная формула Эйлера.

V. Рекуррентные соотношения в комбинаторике

39. Числа Фибоначчи. Определение и формулы суммы чисел Фибоначчи.

40. Числа Каталана. Определение и простейшие интерпретации (скобочные последовательности, последовательности единиц и минус единиц, пути на клетчатой сетке).

41. Принцип отражений. Явная формула для чисел Каталана.

42. Числа Каталана и триангуляции многоугольника.

43. Доказательство явной формулы для чисел Каталана при помощи триангуляций.

44. Числа Белла. Определение и рекуррентная формула.

45. Треугольник Белла.

Вопросы, 2 семестр

46. Числа Стирлинга второго рода. Определение и значения для частных случаев.

47. Рекуррентная формула для чисел Стирлинга второго рода.

48. Связь чисел Стирлинга второго рода и числа сюръекций. Явная формула для чисел Стирлинга второго рода.

49. Числа Стирлинга второго рода и многочлены.

50. Числа Стирлинга первого рода. Определение и рекуррентная формула.

51. Числа Стирлинга первого рода и многочлены.

52. Связь чисел Стирлинга первого и второго рода.

VI. Цепи и антицепи

53. Цепи и антицепи в конечном частично упорядоченном множестве. Представление частично упорядоченного множества в виде орграфа. Цепи и антицепи с точки зрения графов. Теорема Мирского.

54. Теорема Дилуорса. Доказательство при помощи теоремы Кёнига.

55. Вывод теоремы Кёнига из теоремы Дилуорса.

56. Теорема Эрдёша-Секереша о монотонных подпоследовательностях.

57. Разбиение множества всех подмножеств конечного множества на симметричные цепи. Теорема Шпернера о максимальной антицепи в множестве всех подмножеств.

58. Неравенство Любелла-Ямамото-Мешалкина для антицепи в множестве всех подмножеств данного множества.

VII. Производящие функции

59. Производящие функции. Определение и простейшие примеры в случае, когда производящая функция — многочлен. Доказательство формулы суммы квадратов биномиальных коэффициентов при помощи производящих функций.

60. Степенной ряд как функция: формулировки основных теорем о сходимости степенных рядов.

61. Кольцо формальных степенных рядов. Определение и доказательство того, что это кольцо.

62. Обратимые элементы кольца формальных степенных рядов. Сумма геометрической прогрессии с точки зрения формальных степенных рядов.

63. Производящая функция для чисел Фибоначчи. Вывод явной формулы для чисел Фибоначчи при помощи производящих функций.

64. Производящая функция для чисел Каталана. Вывод явной формулы для чисел Каталана при помощи производящих функций.

65. Предел последовательности формальных степенных рядов. Определение и основные свойства.

66. Дискретное нормирование в кольце формальных степенных рядов и его связь с пределом последовательности.

67. Бесконечные суммы и бесконечные произведения формальных степенных рядов. Критерии их сходимости.

68. Композиция формальных степенных рядов. Формальное определение и условия при которых она корректно определена.

69. Производящая функция для числа разбиений. Доказательство утверждения о разбиениях на нечетные и на различные слагаемые при помощи производящих функций.

70. Формальная производная формальных степенных рядов. Определение и основные свойства. Связь с формальными степенными рядами от двух переменных.

71. Логарифмическая производная формального степенного ряда. Определение и основные свойства.

72. Логарифмирование и экспоненцирование формальных степенных рядов.

73. Понятие экспоненциальной производящей функции. Экспоненциальная производящая функция для последовательности $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ при $n \geq 2$.

74. Экспоненциальные производящие функции чисел Стирлинга и Белла.

75. Формальное возведение в степень. Определение и основные свойства.

76. Формальный степенной ряд для $(1+x)^{\alpha}$ (биномиальный ряд).

77. Многомерные производящие функции. Определение и два примера, связанных с биномиальными коэффициентами.

78. Разбиения целочисленных векторов. Двумерная производящая функция для числа этих разбиений. Необходимое и достаточное условие того, что это число не 0.

79. Разбиения целочисленных векторов. Замена переменных и лемма о независимости числа разбиений от одной из новых переменных.

80. Разбиения целочисленных векторов. Лемма о связи с разбиениями чисел.

81. Тождество Гаусса-Якоби. Вывод пентагональной формулы Эйлера из тождества Гаусса-Якоби.

82. Рекуррентная формула для числа разбиений (доказательство при помощи пентагональной формулы Эйлера).

VIII. Дискретная вероятность и вероятностные методы

83. Дискретное вероятностное пространство. Основные определения и примеры.

84. Условная вероятность. Определение, формула полной вероятности. Формула Байеса и теорема Байеса.

85. Независимые события. Определение, примеры и свойства.

86. Случайные величины. Определение и примеры. Распределение случайной величины. Независимые случайные величины.

87. Математическое ожидание. Определение и свойства. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин.

88. Дисперсия и её свойства. Дисперсия суммы независимых случайных величин.

89. Доказательство нижней оценки для $r(k,k)$ на языке теории вероятностей.

90. Теорема Эрдёша-Мозера о наименьшем ациклическом подтурнире.

91. Теорема Клейтмана-Спенсера об (n,k)-универсальных множествах.

92. Лемма об экспоненте. Следствие о (n,k)-универсальных множествах малого размера.

93. Факты о матожидании: оценки наибольшего и наименьшего значения случайной величины, неравенства Маркова и Чебышёва.

94. Теорема Селе о количестве гамильтоновых путей в турнире.

95. Теорема Алона о размере доминирующего множества.

96. Вероятностное доказательство теоремы Эрдёша о хроматическом числе и обхвате графа. Два утверждения о стремящихся к нулю вероятностях — без доказательства.

97. Доказательства утверждений о стремлении к нулю вероятности того, что в случайном графе будет много длинных циклов и будет большое независимое множество (из доказательства теоремы Эрдёша о хроматическом числе и обхвате графа).

IX. Перечисление непомеченных объектов

98. Помеченные графы и графы с точностью до изоморфизма. Группа автоморфизмов графа и её свойства.

99. Задача о числе раскрасок p точек на окружности с точностью до поворота в случае простого p. Вывод малой теоремы Ферма из решения этой задачи.

100. Лемма Бернсайда о подсчете числа орбит.

101. Задача о числе раскрасок n точек на окружности с точностью до поворота. Решение для общего случая.

102. Задача о числе раскрасок n точек на окружности с точностью до поворота и осевой симметрии. Решение для общего случая.

103. Асимптотика числа графов с точностью до изоморфизма. Эквивалентность $g_n \sim g_n^{(0)}$ — без доказательства.

104. Асимптотика числа графов с точностью до изоморфизма: доказательство того, что $g_n \sim g_n^{(0)}$.