Дискретная математика

Глава 5. Рекуррентные соотношения в комбинаторике

А. В. Пастор

19.11.2024

Числа Фибоначчи

Определение

Числа Фибоначчи — последовательность, задаваемая соотношениями
$$F_1 = F_2 = 1 \quad \text{и} \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \text{при} \quad n > 1.$$

Замечание

- Начало последовательности:
$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \dots$
- Можно считать, что $F_0 = 0$.
- Задача о кроликах (Леонардо Пизанский, $\sim$1202 г.)
  - Новорожденная пара кроликов начинает давать потомство через месяц;
  - взрослая пара кроликов раз в месяц производит на свет одну новорожденную пару;
  - изначально есть одна новорожденная пара кроликов.
  - Сколько кроликов будет через год?

Свойства чисел Фибоначчи

Теорема

$F_k F_\ell + F_{k-1} F_{\ell-1} = F_{k+\ell-1}$.

Доказательство.

$\underline{\ell = 1}$: $F_k F_1 + F_{k-1} F_0 = F_k \cdot 1 + F_{k-1} \cdot 0 = F_k = F_{k+1-1}$.

$\underline{\ell \to \ell + 1}$: $F_k F_{\ell+1} + F_{k-1} F_\ell = F_k (F_\ell + F_{\ell-1}) + F_{k-1} F_\ell =$

$= F_k F_\ell + F_k F_{\ell-1} + F_{k-1} F_\ell = (F_k + F_{k-1}) F_\ell + F_k F_{\ell-1} =$

$= F_{k+1} F_\ell + F_k F_{\ell-1} = F_{(k+1)+\ell-1} = F_{k+(\ell+1)-1}$. □

Следствие

$F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n-1}$.

Свойства чисел Фибоначчи

Теорема

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$

Доказательство.

$\underline{n = 1}$: $F_1 = F_3 - 1$.

$\underline{n \to n+1}$: $\sum_{k=1}^{n+1} F_k = \sum_{k=1}^{n} F_k + F_{n+1} = (F_{n+2} - 1) + F_{n+1} = F_{n+3} - 1.$ $\square$

Теорема

$F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$;
$F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.

Доказательство.

$\underline{n = 1}$: $F_1 = F_2$; $F_2 = F_3 - 1$.

$\underline{n \to n+1}$: $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} + F_{2n+1} = F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n+2}$;

$F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} + F_{2n+2} = (F_{2n+1} - 1) + F_{2n+2} = F_{2n+3} - 1.$ $\square$

Числа Каталана

Определение

Числа Каталана — последовательность, задаваемая соотношениями

$$c_0 = 1 \quad \text{и} \quad c_{n+1} = c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + \ldots + c_n c_0 \quad \text{при} \quad n \geq 0.$$

Замечание

1. Eugène Charles Catalan (1814–1894).
2. Начало последовательности (начиная с c_0):
   $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, \ldots$

Правильные скобочные последовательности

Определение

Последовательность открывающих и закрывающих скобок называется *правильной скобочной последовательностью*, если она удовлетворяет следующим двум условиям:

- количества открывающих и закрывающих скобок равны;
- для любого k среди первых k скобок открывающих не меньше, чем закрывающих.

Числа Каталана и скобочные последовательности

Примеры

1. ( ) (( ) ( )) — правильная скобочная последовательность;
2. ( )) ((( )) — неправильная скобочная последовательность.

Теорема

Количество правильных скобочных последовательностей из $2n$ скобок равно c_n.

Доказательство. Обозначим через s_n количество правильных скобочных последовательностей из $2n$ скобок.

- Нужно доказать, что $s_n = c_n$ при всех $n \geq 0$.
- $s_0 = c_0 = 1$, поскольку есть ровно одна правильная скобочная последовательность длины 0 (пустая).
- Докажем, что последовательность s_n задается тем же рекуррентным соотношением, что и c_n (т. е. что $s_{n+1} = s_0 s_n + s_1 s_{n-1} + \ldots + s_n s_0$ при $n \geq 0$).
- Тогда индукцией по n получим, что $s_n = c_n$ при всех $n \geq 0$.

Числа Каталана и скобочные последовательности

- Рассмотрим правильную скобочную последовательность длины $2n+2$.

$$(\,(\,)\,(\,(\,)\,)\,)\,(\,(\,)\,)$$

Числа Каталана и скобочные последовательности

- Рассмотрим правильную скобочную последовательность длины $2n+2$.

$$\color{red}{(}\,()\,(())\,\color{red}{)}\,(())$$

- Отметим в ней первую и m-ю скобки, где

$$m = \min\{k \mid \text{среди первых } k \text{ скобок поровну "(" и ")"}\}.$$

Числа Каталана и скобочные последовательности

- Рассмотрим правильную скобочную последовательность длины $2n+2$.

$$\color{red}{(}\color{blue}{()(())}\color{red}{)}\color{green}{(())}$$

- Отметим в ней первую и m-ю скобки, где

$$m = \min\{k \mid \text{среди первых } k \text{ скобок поровну “(” и “)”}\}.$$

  - Очевидно, что, $m = 2\ell + 2$, где $\ell \in [0..n]$;
  - между первой и m-й скобками находится правильная скобочная последовательность длины 2ℓ;
  - а после m-й скобки — правильная скобочная последовательность длины $2(n-\ell)$.
- Обратно, любой упорядоченной паре правильных скобочных последовательностей длин 2ℓ и $2(n-\ell)$ соответствует правильная скобочная последовательность длины $2n+2$.
- Итого, получаем $s_\ell s_{n-\ell}$ правильных скобочных последовательностей при данном ℓ.
- Просуммировав по всем ℓ получим $s_{n+1} = s_0 s_n + s_1 s_{n-1} + \ldots + s_n s_0$. □

Числа Каталана и скобочные последовательности

Следствие 1

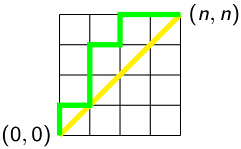
Количество последовательностей длины $2n$, в которых n членов равны 1, n членов равны -1 и все частичные суммы (т. е. суммы первых k членов при $k \leq n$) неотрицательны, равно c_n.

Доказательство. Биекция со скобочными последовательностями.

- Открывающей скобке соответствует 1;
- закрывающей скобке соответствует -1. $\square$

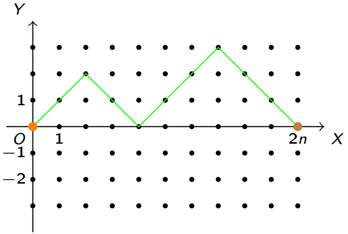
Следствие 2

Количество путей из точки $(0,0)$ в точку (n,n) по линиям клетчатой сетки, идущих вверх и вправо, и не опускающихся ниже прямой $y = x$, равно c_n.



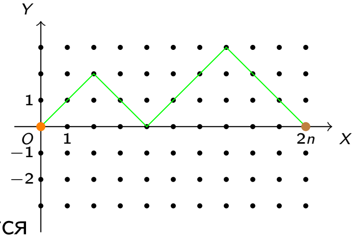
Принцип отражений

Рассмотрим все $2n$-звенные ломаные, ведущие из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$ по точкам с целыми координатами, звенья которых — диагонали единичных квадратиков.



Принцип отражений

Рассмотрим все $2n$-звенные ломаные, ведущие из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$ по точкам с целыми координатами, звенья которых — диагонали единичных квадратиков.

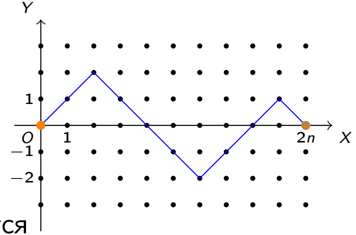


- Ломаная — *хорошая*, если она не опускается ниже оси OX

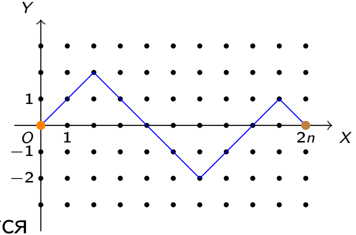
Принцип отражений

Рассмотрим все $2n$-звенные ломаные, ведущие из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$ по точкам с целыми координатами, звенья которых — диагонали единичных квадратиков.

- Ломаная — *хорошая*, если она не опускается ниже оси OX и *плохая* в противном случае.



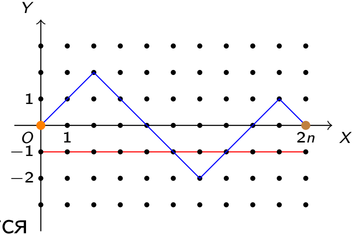
Принцип отражений



Рассмотрим все $2n$-звенные ломаные, ведущие из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$ по точкам с целыми координатами, звенья которых — диагонали единичных квадратиков.

- Ломаная — *хорошая*, если она не опускается ниже оси OX и *плохая* в противном случае.
  - Всего ломаных C_{2n}^{n}, из них хороших — c_n.
  - А сколько плохих ломаных?

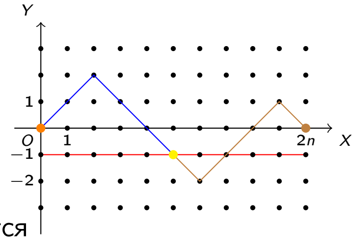
Принцип отражений



Рассмотрим все $2n$-звенные ломаные, ведущие из $(0,0)$ в $(2n,0)$ по точкам с целыми координатами, звенья которых — диагонали единичных квадратиков.

- Ломаная — *хорошая*, если она не опускается ниже оси OX и *плохая* в противном случае.
  - Всего ломаных C_{2n}^n, из них хороших — c_n.
  - А сколько плохих ломаных?
- Плохая ломаная пересекает прямую $y=-1$.

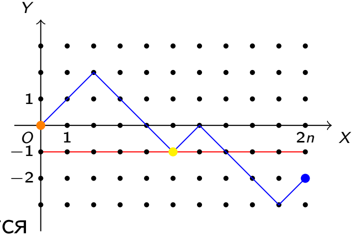
Принцип отражений



Рассмотрим все $2n$-звенные ломаные, ведущие из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$ по точкам с целыми координатами, звенья которых — диагонали единичных квадратиков.

- Ломаная — *хорошая*, если она не опускается ниже оси OX и *плохая* в противном случае.
  - Всего ломаных C_{2n}^n, из них хороших — c_n.
  - А сколько плохих ломаных?
- Плохая ломаная пересекает прямую $y = -1$.
  - Рассмотрим первую точку пересечения и отразим идущую после этой точки часть ломаной относительно прямой $y = -1$.

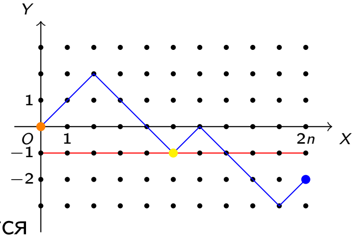
Принцип отражений



Рассмотрим все $2n$-звенные ломаные, ведущие из $(0,0)$ в $(2n,0)$ по точкам с целыми координатами, звенья которых — диагонали единичных квадратиков.

- Ломаная — *хорошая*, если она не опускается ниже оси OX и *плохая* в противном случае.
  - Всего ломаных C_{2n}^{n}, из них хороших — c_n.
  - А сколько плохих ломаных?
- Плохая ломаная пересекает прямую $y=-1$.
  - Рассмотрим первую точку пересечения и отразим идущую после этой точки часть ломаной относительно прямой $y=-1$.
  - Получим ломаную, ведущую из $(0,0)$ в $(2n,-2)$.

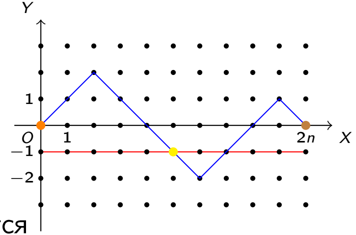
Принцип отражений



Рассмотрим все $2n$-звенные ломаные, ведущие из $(0,0)$ в $(2n,0)$ по точкам с целыми координатами, звенья которых — диагонали единичных квадратиков.

- Ломаная — *хорошая*, если она не опускается ниже оси OX и *плохая* в противном случае.
  - Всего ломаных C_{2n}^n, из них хороших — c_n.
  - А сколько плохих ломаных?
- Плохая ломаная пересекает прямую $y=-1$.
  - Рассмотрим первую точку пересечения и отразим идущую после этой точки часть ломаной относительно прямой $y=-1$.
  - Получим ломаную, ведущую из $(0,0)$ в $(2n,-2)$.
- Обратно, любая ломаная из $(0,0)$ в $(2n,-2)$ пересекает $y=-1$.

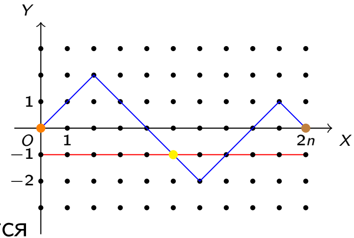
Принцип отражений



Рассмотрим все $2n$-звенные ломаные, ведущие из $(0,0)$ в $(2n,0)$ по точкам с целыми координатами, звенья которых — диагонали единичных квадратиков.

- Ломаная — *хорошая*, если она не опускается ниже оси OX и *плохая* в противном случае.
  - Всего ломаных C_{2n}^{n}, из них хороших — c_n.
  - А сколько плохих ломаных?
- Плохая ломаная пересекает прямую $y = -1$.
  - Рассмотрим первую точку пересечения и отразим идущую после этой точки часть ломаной относительно прямой $y = -1$.
  - Получим ломаную, ведущую из $(0,0)$ в $(2n,-2)$.
- Обратно, любая ломаная из $(0,0)$ в $(2n,-2)$ пересекает $y = -1$.
  - Рассмотрим первую точку пересечения и отразим идущую после этой точки часть ломаной относительно прямой $y = -1$.
  - Получим плохую ломаную из $(0,0)$ в $(2n,0)$.

Принцип отражений



Рассмотрим все $2n$-звенные ломаные, ведущие из $(0,0)$ в $(2n,0)$ по точкам с целыми координатами, звенья которых — диагонали единичных квадратиков.

- Ломаная — *хорошая*, если она не опускается ниже оси OX и *плохая* в противном случае.
  - Всего ломаных C_{2n}^n, из них хороших — c_n.
  - А сколько плохих ломаных?
- Плохая ломаная пересекает прямую $y=-1$.
  - Рассмотрим первую точку пересечения и отразим идущую после этой точки часть ломаной относительно прямой $y=-1$.
  - Получим ломаную, ведущую из $(0,0)$ в $(2n,-2)$.
- Обратно, любая ломаная из $(0,0)$ в $(2n,-2)$ пересекает $y=-1$.
  - Рассмотрим первую точку пересечения и отразим идущую после этой точки часть ломаной относительно прямой $y=-1$.
  - Получим плохую ломаную из $(0,0)$ в $(2n,0)$.
- Итого, плохих ломаных столько же, сколько ломаных из $(0,0)$ в $(2n,-2)$. Легко видеть, что их C_{2n}^{n-1}.

Числа Каталана: явная формула

Теорема

$c_n = \dfrac{C_{2n}^n}{n+1}$.

Доказательство.

- c_n — количество хороших ломаных из $(0,0)$ в $(2n,0)$.
- Всего ломаных C_{2n}^n.
- Плохих ломаных C_{2n}^{n-1}.
- Следовательно,

$$c_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!(n+1-n)}{n!(n+1)!} = \frac{C_{2n}^n}{n+1}.$$

$\square$

Триангуляции многоугольников

Определение

Триангуляцией многоугольника называется такое разбиение его на треугольники, при котором любые два треугольника либо не имеют общих точек, либо имеют ровно одну общую точку (вершину), либо имеют общую сторону.

Замечание

- Триангуляцию многоугольника можно рассматривать как плоский граф. Все его грани, кроме внешней, будут треугольниками.
- Далее мы будем рассматривать *триангуляции многоугольника его диагоналями*, т. е. вершинами триангуляции будут вершины многоугольника, а ребрами — стороны и диагонали многоугольника.
- В курсе теории графов было доказано, что в любой триангуляции k-угольника его диагоналями участвуют ровно $k-3$ диагонали, которые разбивают k-угольник ровно на $k-2$ треугольника.

Числа Каталана и триангуляции

Теорема

Количество способов триангулировать выпуклый $(n+2)$-угольник его диагоналями равно c_n.

Доказательство. Индукция по n.

$n=0, n=1$: утверждение очевидно.

$0, \dots, n \to n+1$: Пусть $A_1 \dots A_{n+3}$ — выпуклый $(n+3)$-угольник.

- Сторона A_1A_{n+3} входит в некоторый треугольник разбиения.
- Пусть его третья вершина — A_{m+2}, где $0 \le m \le n$.
- Удалив $\triangle A_1A_{m+2}A_{n+3}$, получим $(m+2)$-угольник и $(n-m+2)$-угольник.
- По индукционному предположению, их можно триангулировать c_m и c_{n-m} способами соответственно.
- Итого, получаем $\sum\limits_{m=0}^{n} c_mc_{n-m} = c_{n+1}$ триангуляций. $\square$

Числа Каталана и триангуляции

Следствие 1

$c_n = \frac{n+2}{2(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$, *при* $n \geq 2$.

Доказательство. Рассмотрим триангуляцию выпуклого $(n+2)$-угольника.

- Вместо того, чтобы нумеровать его вершины, будет считать, что в $(n+2)$-угольнике есть выделенная сторона.
  - Тогда нумерация вершин задается однозначно.
- Выберем диагональ триангуляции и направление на ней.
  - Это можно сделать $2(n-1)$ способами.
- Итого, получили $2(n-1)c_n$ триангуляций с отмеченной ориентированной диагональю.

Далее, мы посчитаем их количество другим способом

Числа Каталана и триангуляции

- Рассмотрим упорядоченную пару из триангуляций выпуклых $(k+2)$-угольника и $(n-k+2)$-угольника, где $k \in [1..n-1]$.
  - Таких пар $\sum_{i=1}^{n-1} c_i c_{n-i}$.
  - В каждом многоугольнике рассмотренной пары есть выделенная сторона.
- Склеим получившиеся многоугольники по их выделенным сторонам.
  - Получим триангуляцию $(n+2)$-угольника.
  - Отметим в ней диагональ, по которой произошла склейка.
  - Направление выберем так, чтобы первый многоугольник был слева.
- Осталось выделить одну из сторон полученного $(n+2)$-угольника.
  - Это можно сделать $n+2$ способами.
- Итого, получаем $(n+2)\sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$ триангуляций с отмеченной ориентированной диагональю.
- Следовательно, $2(n-1)c_n = (n+2)\sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$. □

Простая рекуррента для чисел Каталана

Следствие 2

$c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}c_n$, *при* $n \geq 0$.

Доказательство. При $n = 0$ и $n = 1$ проверяется непосредственно.

- При $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= c_0c_n + c_1c_{n-1} + \ldots + c_{n-1}c_1 + c_nc_0; \\ c_n &= \tfrac{n+2}{2(n-1)}\left(c_1c_{n-1} + \ldots + c_{n-1}c_1\right). \end{aligned}$$

- Следовательно,

$$c_{n+1} = 2c_n + \frac{2(n-1)}{n+2}c_n = \frac{2(2n+1)}{n+2}c_n.$$

$\square$

Другое доказательство явной формулы

Следствие 3

$c_n = \frac{2^n(2n-1)!!}{(n+1)!} = \frac{C_{2n}^n}{n+1}$, *при* $n > 0$.

Доказательство. Равенство $c_n = \frac{2^n(2n-1)!!}{(n+1)!}$ доказывается индукцией по n.

$\underline{n = 1}$: $c_1 = 1 = \frac{2^1 \cdot 1!!}{2!}$.

$\underline{n \to n+1}$:

$$c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n = \frac{2(2n+1)}{n+2} \cdot \frac{2^n(2n-1)!!}{(n+1)!} = \frac{2^{n+1}(2n+1)!!}{(n+2)!}.$$

- Далее,

$$\frac{2^n(2n-1)!!}{(n+1)!} = \frac{2^n n!(2n-1)!!}{n!(n+1)!} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{n!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{C_{2n}^n}{n+1}.$$

□

Числа Белла

Определение

- *Разбиением* множества X называется его представление в виде $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k$, где все подмножества X_k непусты и попарно не пересекаются.
- Разбиения, отличающиеся лишь нумерацией подмножеств, считаются одинаковыми.
- Подмножества X_i называются *блоками* или *частями* разбиения.
- *Числом Белла* B_n называется число разбиений n-элементного множества.
- Будем считать, что $B_0 = 1$.

Числа Белла

Пример

Трехэлементное множество можно разбить пятью способами:

$$\begin{aligned}
\{1,2,3\} &= \{1,2,3\};\\
\{1,2,3\} &= \{1,2\}\cup\{3\};\\
\{1,2,3\} &= \{1,3\}\cup\{2\};\\
\{1,2,3\} &= \{2,3\}\cup\{1\};\\
\{1,2,3\} &= \{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}.
\end{aligned}$$

Следовательно, $B_3 = 5$.

Замечание

1. Eric Temple Bell (1883–1960).
2. Начало последовательности (начиная с B_0):
   $1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, 678570, 4213597, 27644437, \ldots$

Рекуррентная формула для чисел Белла

Теорема

$B_{n+1} = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i B_{n-i}$.

Доказательство.

- Пусть $X_1 \cup \ldots \cup X_k$ — разбиение множества $[1..n+1]$;
  - не умаляя общности, $n+1 \in X_k$.
- Тогда $X_1 \cup \ldots \cup X_{k-1}$ — разбиение множества $[1..n+1] \setminus X_k$.
- Пусть $|X_k| = i+1$ (где $i \in [0..n]$).
  - Тогда X_k можно выбрать C_n^i способами.
  - Оставшиеся элементы можно разбить B_{n-i} способами.
- Следовательно, всего $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i B_{n-i}$ разбиений. $\square$

Треугольник Белла

Определение

- Определим числа $A_{n,k}$ (где $n \geq k \geq 1$) при помощи следующих соотношений: $A_{1,1} = 1$; $A_{n+1,1} = A_{n,n}$ и $A_{n+1,k+1} = A_{n+1,k} + A_{n,k}$.
- Эти числа образуют *треугольник Белла*.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & & & & \\
 & & & & 2 & & 3 & & 5 & & & & \\
 & & & 5 & & 7 & & 10 & & 15 & & & \\
 & & 15 & & 20 & & 27 & & 37 & & 52 & & \\
 & 52 & & 67 & & 87 & & 114 & & 151 & & 203 & \\
203 & & 255 & & 322 & & 409 & & 523 & & 674 & & 877
\end{array}
$$

Теорема

Для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $A_{n,n} = B_n$.

Доказательство. Докажем следующее более общее утверждение.

- *$A_{n,k}$ — это количество таких разбиений множества $[1..n]$, в которых в одном блоке с n могут встречаться только числа, меньшие k.*

Треугольник Белла

- Индукция по n.

База: при $n = 1$ утверждение очевидно.

Переход $(n \to n+1)$: будем доказывать индукцией по k.

- $k = 1$: $A_{n+1,1} = A_{n,n}$ — это количество разбиений множества $[1..n+1]$, в которых $n+1$ является единственным элементом в своем блоке.
- $k \to k+1$: пусть $X_1 \cup \ldots \cup X_s$ — разбиение множества $[1..n+1]$, в котором в одном блоке с $n+1$ могут быть только числа, меньшие $k+1$.
  - Не умаляя общности можно считать, что $n+1 \in X_s$.
  - Далее возможны два случая: $k \notin X_s$ и $k \in X_s$.

    1° Пусть $k \notin X_s$. Тогда в X_s кроме $n+1$ могут быть только числа, меньшие k. Таких разбиений $A_{n+1,k}$.

    2° Пусть $k \in X_s$. Тогда удалив k и уменьшив все большие k числа на 1, получим разбиение множества $[1..n]$, в котором в одном блоке с n могут встречаться только числа, меньшие k. Таких разбиений $A_{n,k}$.
  - Итого, получаем $A_{n+1,k} + A_{n,k} = A_{n+1,k+1}$ разбиений. $\square$

Числа Стирлинга второго рода

Определение

Числом Стирлинга второго рода $S(n, k)$ называется число разбиений n-элементного множества на k блоков.

Пример

Трехэлементное множество можно тремя способами разбить на два блока:
$\{1, 2, 3\} = \{1, 2\} \cup \{3\}$; $\{1, 2, 3\} = \{1, 3\} \cup \{2\}$; $\{1, 2, 3\} = \{2, 3\} \cup \{1\}$.
Следовательно, $S(3, 2) = 3$.

Замечание

- Будем считать, что $S(0, 0) = 1$ и $S(0, k) = 0$ при $k > 0$.
- Очевидно, что
  - $S(n, k) = 0$, при $k > n > 0$;
  - $S(n, 0) = 0$, при всех $n > 0$;
  - $S(n, 1) = S(n, n) = 1$, при всех $n > 0$.
- Заметим также, что $\sum_{k=0}^{n} S(n, k) = B_n$.

Числа Стирлинга второго рода

Утверждение 1

$S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$, *при всех* $n > 0$.

Доказательство.

- Пусть $[1..n] = X_1 \cup X_2$ — разбиение множества $[1..n]$ на два блока.
- Не умаляя общности, пусть $1 \in X_1$;
- тогда X_2 — произвольное непустое подмножество множества $[2..n]$;
- таких подмножеств $2^{n-1} - 1$. $\square$

Утверждение 2

$S(n, n-1) = C_n^2$, *при всех* $n > 0$.

Доказательство.

- В любом разбиении $[1..n]$ на $n-1$ блок есть ровно один блок, состоящий из двух элементов.
- Такой блок можно выбрать C_n^2 способами.
- Остальные блоки выбираются однозначно. $\square$

Рекуррентная формула для чисел Стирлинга второго рода

Теорема

$S(n, k) = kS(n-1, k) + S(n-1, k-1)$.

Доказательство.

- Пусть $X_1 \cup \ldots \cup X_k$ — разбиение множества $[1..n]$.
  - Не умаляя общности, $n \in X_k$.
- Далее, возможны два случая: блок X_k может состоять только из n, либо содержать и другие элементы.

  1° Пусть $X_k = \{n\}$. Тогда $X_1 \cup \ldots \cup X_{k-1}$ — разбиение множества $[1..n-1]$. Таких разбиений $S(n-1, k-1)$ и каждому из них соответствует ровно одно разбиение для первого случая.

  2° Пусть $\{n\} \subsetneq X_k$. Тогда $X_1 \cup \ldots \cup X_{k-1} \cup X'_k$, где $X'_k = X_k \setminus \{n\}$ — разбиение множества $[1..n-1]$. Таких разбиений $S(n-1, k)$. Каждому из них соответствует ровно k разбиений для второго случая, поскольку число n можно добавить в любой из k блоков.
- Итого, получаем $kS(n-1, k) + S(n-1, k-1)$ разбиений множества $[1..n]$ на k блоков. □

Числа Стирлинга второго рода и сюръективные отображения

Теорема

Число сюръективных отображений из n-элементного множества в k-элементное равно $k!S(n,k)$.

Доказательство. Пусть $f\colon [1..n] \to [1..k]$ — сюръекция.

- Положим $X_i = f^{-1}(i)$.
- Тогда $[1..n] = X_1 \cup \ldots \cup X_k$ — *упорядоченное разбиение* множества $[1..n]$ на k блоков.
  - Т. е. разбиения, отличающиеся сменой нумерации блоков, здесь считаются различными.
- Обратно, каждому упорядоченному разбиению множества $[1..n]$ на k блоков можно поставить в соответствие сюръективное отображение из множества $[1..n]$ в множество $[1..k]$.
  - Образом элемента $x \in [1..n]$ будет номер содержащего x блока.
- Каждому разбиению множества $[1..n]$ на k блоков соответствует $k!$ упорядоченных разбиений. Следовательно, число упорядоченных разбиений множества $[1..n]$ на k блоков равно $k!S(n,k)$. □

Числа Стирлинга второго рода: явная формула

Теорема

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{s=0}^{k}(-1)^{k-s}C_k^s s^n.$$

Доказательство.

- Мы уже доказывали, что число сюръективных отображений $f:[1..n]\to[1..k]$ равно $\sum_{s=1}^{k}(-1)^{k-s}C_k^s s^n$.
- Тем самым,

$$k!S(n,k) = \sum_{s=1}^{k}(-1)^{k-s}C_k^s s^n,$$

откуда, сократив на $k!$, получим требуемое. $\square$

Числа Стирлинга второго рода и многочлены

Теорема

При всех $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x(x-1)\dots(x-k+1).$$

Доказательство. Докажем сначала, что это равенство выполнено при всех натуральных x, больших n.

- Рассмотрим все возможные отображения из $[1..n]$ в $[1..x]$.
- Мы знаем, что их x^n. Посчитаем их число другим способом.
- Рассмотрим произвольное отображение $f\colon [1..n] \to [1..x]$.
  - Обозначим его образ через Y (т. е. $Y \stackrel{\text{def}}{=} f([1..n])$). Пусть $|Y| = k$.
  - Тогда отображение f является сюръекцией из $[1..n]$ на Y.
  - Таких сюръекций существует ровно $k!S(n,k)$.
  - Множество $Y \subset [1..x]$ (где $|Y| = k$) можно выбрать C_x^k способами.

Числа Стирлинга второго рода и многочлены

- Итого, для каждого $k \in [0..n]$ существует ровно

$$k!S(n,k)C_x^k = S(n,k)x(x-1)\dots(x-k+1)$$

отображений с образом из k элементов.

- Складывая получившиеся выражения по всем возможным k получаем требуемую формулу.
- Итак, мы доказали, что равенство

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x(x-1)\dots(x-k+1) \qquad (1)$$

выполнено при всех $x \in \mathbb{N}$, таких, что $x > n$.

- Заметим, что и в левой и в правой частях равенства (1) записаны многочлены с целыми коэффициентами от переменной x.
- Мы доказали, что значения этих многочленов равны для бесконечного множества значений x. Следовательно, равны сами многочлены.
- Таким образом, значения этих многочленов равны при всех x. $\square$

Числа Стирлинга первого рода

Определение

- Пусть $c(n,k)$ — число перестановок из S_n, имеющих в точности k циклов.
- Будем считать, что $c(0,0)=1$ и $c(0,k)=0$ при $k>0$.
- Обозначим также $s(n,k)=(-1)^{n-k}c(n,k)$.
- Числа $s(n,k)$ называются *числами Стирлинга первого рода*,
- а числа $c(n,k)$ — *числами Стирлинга первого рода без знака*.

Пример

- В S_3 есть три перестановки с двумя циклами: $(12)(3)$, $(13)(2)$, $(23)(1)$.
- Следовательно, $c(3,2)=3$ и $s(3,2)=-3$.

Теорема

$c(n,k)=(n-1)c(n-1,k)+c(n-1,k-1)$.

Доказательство.

- Пусть $\sigma\in S_{n-1}$ — перестановка ровно с k циклами.

Числа Стирлинга первого рода

- Мы можем вставить n после любого из элементов $1, 2, \ldots, n-1$ в разложении перестановки σ на независимые циклы.
- Это можно сделать $n-1$ способом.
- Получим перестановку $\sigma' \in S_n$ с k циклами, в которой n входит в цикл длины не меньше двух.
- Очевидно, что каждая такая перестановка σ' будет получена ровно один раз. Следовательно, таких перестановок $(n-1)c(n-1, k)$.

- Пусть $\tau \in S_{n-1}$ — перестановка ровно с $k-1$ циклом.
  - Добавим туда элемент n так, чтобы он образовывал цикл длины 1.
  - Получим перестановку $\tau' \in S_n$ с k циклами, в которой n входит в цикл длины один.
  - Очевидно, что каждая такая перестановка τ' будет получена ровно один раз. Следовательно, таких перестановок $c(n-1, k-1)$.
- Итого, получаем $(n-1)c(n-1, k) + c(n-1, k-1)$ перестановок из S_n с k циклами. $\square$

Числа Стирлинга первого рода

Теорема

При всех $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство

$$\sum_{k=0}^{n} c(n,k)x^k = x(x+1)\dots(x+n-1).$$

Доказательство. Индукция по n.

База: при $n = 1$ утверждение очевидно.

Переход $(n-1 \to n)$: $x(x+1)\dots(x+n-2)(x+n-1) =$

$$= x(x+1)\dots(x+n-2)\cdot x + x(x+1)\dots(x+n-2)\cdot(n-1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} c(n-1,k)x^k \cdot x + \sum_{k=0}^{n-1} c(n-1,k)x^k \cdot (n-1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c(n-1,k-1)x^k + \sum_{k=0}^{n-1}(n-1)c(n-1,k)x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}((n-1)c(n-1,k) + c(n-1,k-1))x^k = \sum_{k=0}^{n} c(n,k)x^k.$$

□

Числа Стирлинга первого рода

Следствие

При всех $x \in \mathbb{R}$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено равенство*

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k = x(x-1)\dots(x-n+1).$$

Доказательство.

Заменим в предыдущей формуле x на $-x$ и домножим на $(-1)^n$. $\square$

Связь между числами Стирлинга первого и второго рода

Теорема

При всех $m, n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} S(m,k)s(k,n) = \delta_{mn}$$

(где $\delta_{mn} = 1$ при $m = n$ и $\delta_{mn} = 0$ в остальных случаях).

Доказательство. $x^m = \sum\limits_{k=0}^{m} S(m,k)x(x-1)\dots(x-k+1) =$

$$= \sum_{k=0}^{m}\left(S(m,k)\cdot\sum_{n=0}^{k} s(k,n)x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} S(m,k)s(k,n)\right)x^n.$$

Приравнивая коэффициенты при x^n получаем требуемое равенство. $\square$

Числа Стирлинга и линейная алгебра

- Кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ можно рассматривать как линейное пространство над $\mathbb{R}$.
  - Это пространство имеет счётную размерность;
  - его базис — $1, x, x^2, x^3, \ldots$ (т. е. все степени x);
  - $1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), \ldots$ — другой базис этого же пространства.

Замечание

- Выражение $x(x-1)\ldots(x-k+1)$ называется *нисходящей факториальной степенью* или *убывающим факториалом* и обозначается $x^{\underline{k}}$ или $(x)_k$;
- выражение $x(x+1)\ldots(x+k-1)$ называется *восходящей факториальной степенью* или *возрастающим факториалом* и обозначается $x^{\overline{k}}$ или $(x)^k$.

- Мы доказали формулы $x^n = \sum\limits_{k=0}^{n} S(n,k)x^{\underline{k}}$ и $x^{\underline{n}} = \sum\limits_{k=0}^{n} s(n,k)x^k$.
- То есть числа $S(n,k)$ — это коэффициенты разложения многочленов $1, x, x^2, \ldots$ по базису $1, x, x^{\underline{2}}, \ldots$. А числа $s(n,k)$ — это коэффициенты разложения многочленов $1, x, x^{\underline{2}}, \ldots$ по базису $1, x, x^2, \ldots$.

Числа Стирлинга и матрицы

- Из чисел Стирлинга первого и второго рода можно составить матрицы s и S соответственно.
  - Это матрицы счетной размерности. Их элементы определяются равенствами $s_{ij} = s(i,j)$ и $S_{ij} = S(i,j)$.

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -6 & 11 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 24 & -50 & 35 & -10 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -120 & 274 & -225 & 85 & -15 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 720 & -1764 & 1624 & -735 & 175 & -21 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}; \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 63 & 301 & 350 & 140 & 21 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

- Эти матрицы состоят из коэффициентов разложения элементов одного базиса по другому. Такие матрицы называются *матрицы перехода*.
- Теорема о связи чисел Стирлинга первого и второго рода фактически означает, что $S \cdot s = E$, то есть матрицы S и s взаимно обратны.