

# Дискретная математика

## Глава 6. Цепи и антицепи

А. В. Пастор

28.03.2025

## Цепи и антицепи

- Напомним, что частично упорядоченным множеством называется упорядоченная пара  $(X, \succ)$ , где  $X$  — множество и  $\succ$  — отношение частичного порядка на  $X$ .
- Для определенности будем считать, что  $\succ$  — отношение строгого частичного порядка, то есть оно иррефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

### Определение

Пусть  $(M, \succ)$  — конечное частично упорядоченное множество.

- **Цепью** в  $M$  называется линейно упорядоченное подмножество  $X \subset M$ 
  - ▶ т. е. элементы  $X$  образуют монотонную последовательность

$$x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_m.$$

- **Антицепью** в  $M$  называется подмножество  $Y \subset M$ , любые два различных элемента которого **несравнимы**
  - ▶ т. е. такие  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , что  $y_i \not\succeq y_j$  при  $i \neq j$ .

## Цепи и антицепи с точки зрения орграфов

### Замечание

- Пусть  $(M, \succ)$  — конечное частично упорядоченное множество.
- Построим соответствующий ему орграф  $D_M$  следующим образом:
  - ▶  $V(D_M) = M$ ;
  - ▶  $A(D_M) = \{xy \mid x \succ y\}$ .
- Заметим, что тогда
  - ▶  $D_M$  — орграф без циклов;
  - ▶ **цепь** в  $M$  — это простой ориентированный путь в  $D_M$ ;
  - ▶ **антицепь** в  $M$  — это независимое множество в  $D_M$ .
- Обратно, любой орграф  $D$  без циклов задает отношение частичного порядка на множестве своих вершин.
  - ▶ Для этого нужно построить **транзитивное замыкание** орграфа  $D$ , то есть провести стрелки, соединяющие начало любого простого пути в  $D$  с его концом.

Далее, нас будут интересовать разбиения  $M$  на наименьшее возможное число цепей и на наименьшее возможное число антицепей.

## Теорема Мирского

### Теорема (Мирский, 1971)

Длина максимальной цепи в  $M$  равна минимальному количеству антицепей, на которые разбивается  $M$ .

Доказательство.

- Пусть  $m$  — длина максимальной цепи в  $M$ ;
- $k$  — минимальное число антицепей, на которые разбивается  $M$ .
- Неравенство  $k \geq m$  тривиально, поскольку цепь и антицепь могут иметь не более одного общего элемента.
- Докажем, что  $k \leq m$ . Для этого нужно построить разбиение множества  $M$  на  $m$  антицепей.
  - ▶ Пусть  $\ell(x)$  — длина максимальной цепи с началом в  $x$ .
  - ▶ Для каждого  $i \in [1..m]$  введем обозначение  $Y_i \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M \mid \ell(x) = i\}$ .
  - ▶ Легко видеть, что  $Y_1, \dots, Y_m$  — антицепи в  $M$ , причем каждый элемент  $M$  принадлежит ровно одной из этих антицепей.
  - ▶ Следовательно,  $Y_1, \dots, Y_m$  — разбиение  $M$  на  $m$  антицепей. □

## Теорема Мирского и раскраски графов

### Замечание

- Наряду с орграфом  $D_M$ , можно также рассмотреть соответствующий неориентированный граф  $G_M \stackrel{\text{def}}{=} \underline{D_M}$ .
- Заметим, что тогда
  - ▶ цепи в  $M$  соответствуют кликам в графе  $G_M$ ;
  - ▶ антицепи в  $M$  соответствуют независимым множествам в  $G_M$ .
- Тогда длина максимальной цепи в  $M$  равна  $\omega(G_M)$ ;
- минимальное число антицепей, на которые разбивается  $M$ , равно  $\chi(G_M)$ .
- То есть теорема Мирского утверждает, что  $\chi(G_M) = \omega(G_M)$ .
- Легко видеть, что аналогичное равенство верно и для любого индуцированного подграфа  $G_M$ .

### Определение

Граф  $G$  называется **совершенным**, если для любого его индуцированного подграфа  $H$  выполнено равенство  $\chi(H) = \omega(H)$ .

- То есть из теоремы Мирского следует, что граф  $G_M$  — совершенный.

## Теорема Дилуорса

### Теорема (Дилуорс, 1950)

*Размер максимальной антицепи в  $M$  равен минимальному количеству цепей, на которые разбивается  $M$ .*

### Замечание

Эта теорема уже была доказана в курсе теории графов, как следствие теоремы Галлаи-Мильграма. Здесь мы приведем другое доказательство теоремы Дилуорса.

**Доказательство.** Пусть  $n$  — размер максимальной антицепи в  $M$ ;  
 $k$  — минимальное число цепей, на которые разбивается  $M$ .

- Как и в предыдущей теореме, неравенство  $k \geq n$  тривиально, поскольку цепь и антицепь могут иметь не более одного общего элемента.
- Докажем, что  $k \leq n$ . Для этого нужно построить разбиение множества  $M$  на  $n$  цепей.
- Пусть  $M = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$  и  $D = D_M$  — соответствующий орграф.

## Доказательство теоремы Дилуорса

- “Удвоим” оргграф  $D$ . Т. е. построим следующий двудольный граф  $H$ :
  - ▶ каждой вершине  $u_i \in M$  ставим в соответствие пару вершин  $a_i, b_i$ ;
  - ▶ пусть  $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ ,  $B = \{b_1, \dots, b_p\}$ ,  $V(H) = A \cup B$ ;
  - ▶ если в  $D$  есть стрелка  $u_i u_j$ , то проводим в  $H$  ребро  $a_i b_j$ .
- Можно считать, что  $b_i$  — это “**вход**” в вершину  $u_i$ , а  $a_i$  — “**выход**”.
- Докажем, что  $\beta(H) \geq p - n$ .
  - ▶ Действительно, пусть  $W$  — вершинное покрытие в  $H$ .
  - ▶ Рассмотрим подмножество  $W' \subset M$ , состоящее из элементов, соответствующих вершинам из  $W$ .
  - ▶ Тогда  $W'$  — вершинное покрытие в  $D$ .
  - ▶ Следовательно,  $M \setminus W'$  — независимое множество, т. е. антицепь в  $M$ .
- По теореме Кёнига  $\alpha'(H) = \beta(H) \geq p - n$ .
- Тогда в  $G$  есть паросочетание  $S$ , где  $|S| \geq p - n$ .
- Пусть  $F$  — множество стрелок  $D$ , соответствующих ребрам из  $S$ .
- Рассмотрим подграф  $D' = (M, F)$  оргграфа  $D$ .
- В нем  $p$  вершин и не менее  $p - n$  стрелок.

## Завершение доказательства теоремы Дилуорса

- Все компоненты слабой связности  $D'$  — простые ориентированные пути.
  - ▶ Компонента не может быть циклом, т. к. в  $D$  циклов нет.
- Эти пути являются цепями в  $M$  и задают разбиение  $M$  на цепи.
- Путь не более  $n$ , т. к. если в пути  $\ell$  стрелок, то в нем  $\ell + 1$  вершина. □

### Замечание

Мы вывели теорему Дилуорса из теоремы Кёнига. Можно сделать и наоборот. Давайте выведем теорему Кёнига из теоремы Дилуорса.

- Пусть  $H = (V_1, V_2, E)$  — двудольный граф.
- Обозначим через  $D$  ориентацию графа  $H$ , в которой все стрелки ориентированны из  $V_1$  в  $V_2$ .
- Орграф  $D$  задает отношение частичного порядка на множестве  $V = V_1 \cup V_2$ .
- Очевидно, что любая цепь в получившемся частично упорядоченном множестве состоит из не более, чем двух вершин. Более того, цепи из двух элементов — это стрелки орграфа  $D$ .

## О связи теорем Дилуорса и Кёнига

- Таким образом, любое разбиение  $V$  на непересекающиеся цепи состоит из нескольких не имеющих общих концов стрелок (эти стрелки задают некоторое паросочетание в  $H$ ) и отдельных вершин.
- Следовательно, минимальное количество цепей, на которые можно разбить  $V$ , равно  $v(H) - \alpha'(H)$ .
- С другой стороны, подмножество  $W \subset V$  является антицепью если и только если  $W$  является независимым множеством в графе  $H$ .
- Таким образом, размер максимальной антицепи равен  $\alpha(H) = v(H) - \beta(H)$ .
- Тогда по теореме Дилуорса  $v(H) - \alpha'(H) = v(H) - \beta(H)$ , откуда  $\alpha'(H) = \beta(H)$ . □

## Применение теоремы Дилуорса

### Теорема (Эрдёш-Секереш)

*Из любой последовательности различных вещественных чисел длины  $mn + 1$  можно выбрать либо возрастающую подпоследовательность из  $m + 1$  числа, либо убывающую подпоследовательность из  $n + 1$  числа.*

*Доказательство.*

- Пусть  $L = (x_1, x_2, \dots, x_{mn+1})$  — последовательность из условия.
- Рассмотрим множество  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{mn+1}\}$  и введем на нем следующее отношение порядка:
  - ▶  $a \succ b$ , если и только если  $a > b$  и число  $a$  стоит левее, чем  $b$ .
- Тогда любая убывающая подпоследовательность в  $L$  является цепью, а любая возрастающая подпоследовательность — антицепью.
- Предположим, что возрастающей подпоследовательности из  $m + 1$  числа в  $L$  нет. Тогда размер максимальной антицепи не более  $m$ .
- По теореме Дилуорса,  $X$  можно разбить на не более, чем  $m$  цепей. Одна из них будет иметь длину хотя бы  $n + 1$  и задаст искомую убывающую подпоследовательность. □

### Определение

- Пусть  $X$  — конечное множество,  $|X| = n$  и  $M = \mathcal{P}(X)$ .
- Зададим на  $M$  отношение частичного порядка  $A \subset B$ .
- Цепь  $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  в  $(M, \subset)$  называется *симметричной*, если выполняются следующие два условия:
  1.  $|A_1| + |A_k| = n$ ;
  2.  $\forall i \in [1..k-1] (|A_{i+1}| = |A_i| + 1)$ .

### Замечание

- В частности, тогда  $|A_i| + |A_{k+1-i}| = n$  при всех  $i \in [1..k]$ .
- Элементы множества  $M$  можно записывать как последовательности нулей и единиц (т.е. элементы из  $\{0, 1\}^n$ ).

## Системы подмножеств и симметричные цепи

- Пусть  $A = (a_1, \dots, a_n)$  и  $B = (b_1, \dots, b_n)$  — элементы  $\{0, 1\}^n$ .
  - ▶ Тогда  $A \prec B$ , если  $\forall i (a_i \leq b_i)$  и хотя бы одно из неравенств строгое.
  - ▶ Симметричная цепь в  $\{0, 1\}^n$  — это такая последовательность упорядоченных наборов нулей и единиц, в которой каждый следующий набор получается из предыдущего заменой одного нуля на единицу и суммарное число единиц в первом и последнем наборе равно  $n$ .

### Теорема

Множество  $M$  можно разбить на  $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  симметричных цепей.

Доказательство. Индукция по  $n$ .

База: при  $n = 1$  утверждение очевидно.

Переход ( $n - 1 \rightarrow n$ ): пусть  $X = \{x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ .

- Рассмотрим множество  $X' = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ . По индукционному предположению,  $\mathcal{P}(X')$  можно разбить на симметричные цепи.
- Пусть  $C = \{A_1, \dots, A_{k-1}, A_k\}$ , где  $A_1 \subset \dots \subset A_{k-1} \subset A_k$  — одна из цепей в разбиении  $\mathcal{P}(X')$  на симметричные цепи.

- Тогда рассмотрим следующие цепи в  $\mathcal{P}(X)$ :
  - ▶  $C'_i: A_1 \subset \dots \subset A_{k-1} \subset A_k \subset A_k \cup \{x_n\}$ ;
  - ▶  $C''_i: A_1 \cup \{x_n\} \subset \dots \subset A_{k-1} \cup \{x_n\}$  (в случае  $k > 1$ ).
- Легко видеть, что цепи  $C'_i, C''_i$  симметричны и все цепи такого вида задают разбиение множества  $\mathcal{P}(X)$ .
- Количество цепей равно  $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ , поскольку каждая симметричная цепь в  $\mathcal{P}(X)$  содержит ровно одно подмножество мощности  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . □

## Теорема Шпернера

### Теорема (Шпернер, 1928)

Пусть  $X$  — конечное множество,  $|X| = n$  и  $M = \mathcal{P}(X)$ . Тогда размер максимальной антицепи в  $M$  равен  $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ .

Доказательство.

- Мы доказали, что  $M$  можно разбить на  $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  симметричных цепей.
- Следовательно, по теореме Дилуорса, размер максимальной антицепи в  $M$  не превосходит  $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ .
- С другой стороны, антицепь размера  $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  в  $M$  есть: это все подмножества мощности  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . □
- На самом деле, этот результат является частным случаем более общей теоремы.
- В ней мы, в частности, получим другое доказательство теоремы Шпернера.

## Неравенство Любелла — Ямамото — Мешалкина

### Теорема (Любелл, 1966)

Пусть  $X$  — конечное множество,  $|X| = n$ ,  $M = \mathcal{P}(X)$  и  $\mathcal{F}$  — антицепь в  $M$ .

Тогда

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} \frac{1}{C_n^{|A|}} \leq 1.$$

Доказательство.

- Рассмотрим все возможные **максимальные цепи** в  $M$ . То есть последовательности подмножеств вида

$$\emptyset = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \dots \subsetneq A_n = X.$$

- Всего таких цепей  $n!$ . Каждое подмножество  $A \subset X$  содержится ровно в  $|A|!(n - |A|)!$  максимальных цепях.
- При этом, каждая максимальная цепь пересекает антицепь  $\mathcal{F}$  максимум по одному элементу.
- Следовательно,  $\sum_{A \in \mathcal{F}} |A|!(n - |A|)! \leq n!$ .
- Сократив это неравенство на  $n!$ , получим требуемое. □