

# Дискретная математика

## Глава 9. Перечисление непомеченных объектов

А. В. Пастор

30.05.2025

## Помеченные и непомеченные объекты

- Во многих комбинаторных задачах ответ и трудность его нахождения существенно зависят от того, рассматриваются ли помеченные или непомеченные объекты.
- Например, сколько существует различных графов на  $n$  вершинах? Ответ на этот вопрос зависит от того, какие графы мы будем считать различными.
  1. Пусть  $n$  вершин занумерованы числами от 1 до  $n$ . Тогда у нас есть  $C_n^2$  пар вершин, каждую из которых можно соединить или не соединить ребром. Итого, получаем  $2^{C_n^2} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$  различных графов.
    - Графы, все вершины которых занумерованы натуральными числами от 1 до  $v(G)$  называют *помеченными*, а полученное выше количество графов — это *число помеченных графов* на  $n$  вершинах.
  2. Совсем другой результат получается, если никаких пометок на вершинах нет и все вершины считаются идентичными.
    - Напомним, что *изоморфизмом* графов  $G_1$  и  $G_2$  называется биекция  $\varphi: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ , удовлетворяющая условию  $\forall x, y \in V(G_1) (xy \in E(G_1) \iff \varphi(x)\varphi(y) \in E(G_2))$ .
    - Сами графы  $G_1$  и  $G_2$  в этом случае называют *изоморфными*. Обозначение:  $G_1 \cong G_2$ .

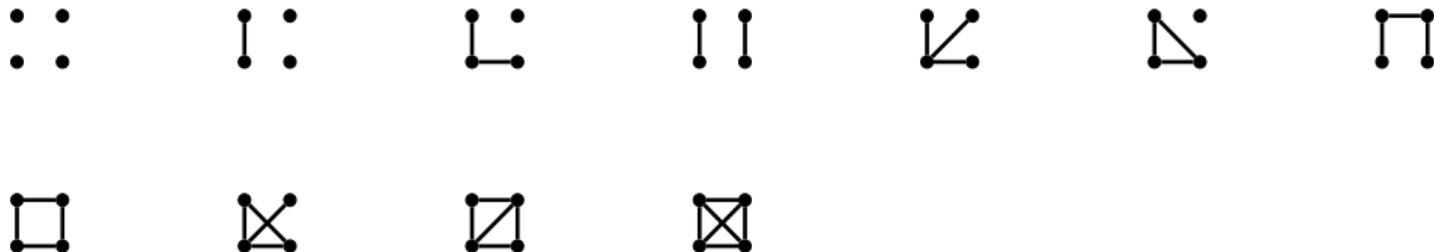
## Графы с точностью до изоморфизма

- По сути, если мы стираем пометки на вершинах графа, то мы перестаем различать изоморфные друг другу графы. Тогда возникает вопрос о количестве графов *с точностью до изоморфизма*.

- ▶ Легко видеть, что изоморфность двух помеченных графов — это отношение эквивалентности. А интересующее нас количество графов с точностью до изоморфизма — это число классов эквивалентности.

### Пример

Есть  $2^6 = 64$  помеченных графов на 4 вершинах, но всего 11 попарно неизоморфных графов на 4 вершинах.



## Расстановка пометок и автоморфизмы графа

- Посмотрим на этот вопрос с другой стороны. Сколько есть способов расставить пометки на вершинах данного непомеченного графа?
- Другими словами, сколько помеченных графов входят в данный класс эквивалентности?
  - ▶ Количество классов эквивалентности было бы легко посчитать, если бы все классы содержали одинаковое число элементов. Однако, это, увы, не так.
  - ▶ Например, очевидно, что полный граф является единственным элементом своего класса эквивалентности. Но есть  $n(n-1)/2$  помеченных графов на  $n$  вершинах ровно с одним ребром — и все они изоморфны.
- Всего есть  $n!$  способов расставить пометки на данных  $n$  вершинах. Но некоторые из этих способов могут давать один и тот же помеченный граф.
  - ▶ То есть граф может оказаться изоморфен сам себе.

### Определение

- **Автоморфизмом** графа  $G$  называется изоморфизм из  $G$  в  $G$ .
- Множество всех автоморфизмов графа  $G$  обозначается  $\text{Aut}(G)$ .

## Группа автоморфизмов графа

### Замечание

- Итак, автоморфизм графа — это перестановка на множестве его вершин, сохраняющая отношение смежности.
- Пусть вершины графа  $G$  занумерованы числами от 1 до  $n$ . Тогда  $\text{Aut}(G) \subset S_n$ .

### Утверждение

$$\text{Aut}(G) < S_n.$$

**Доказательство.** Очевидно, что  $e \in \text{Aut}(G)$ . Далее нужно проверить замкнутость относительно умножения и взятия обратного элемента.

- Пусть  $\varphi, \psi \in \text{Aut}(G)$ . Поскольку  $\varphi$  и  $\psi$  — биекции, их композиция — также биекция. Далее, для любых  $x, y \in V(G)$  имеем  $xy \in E(G) \iff \psi(x)\psi(y) \in E(G) \iff \varphi(\psi(x))\varphi(\psi(y)) \in E(G)$ .
- Пусть  $\varphi \in \text{Aut}(G)$ . Поскольку  $\varphi$  — биекция, сохраняющая отношение смежности, то  $\varphi^{-1}$  — также биекция, сохраняющая отношение смежности. □

## Группа автоморфизмов и её свойства

### Определение

Определенная выше группа  $\text{Aut}(G)$  называется *группой автоморфизмов* графа  $G$ .

### Утверждение

1. Если  $G_1 \cong G_2$ , то  $\text{Aut}(G_1) \cong \text{Aut}(G_2)$ ;
2. для любого графа  $G$  выполнено  $\text{Aut}(G) \cong \text{Aut}(\overline{G})$ .

### Замечание

- То есть группы автоморфизмов изоморфных графов всегда изоморфны.
- Но обратное наверно. Например, легко построить граф, не изоморфный своему дополнению. У этих графов группы автоморфизмов будут изоморфны, а сами графы — нет.
- Порядок группы автоморфизмов тесно связан с числом способов расставить пометки на вершинах данного непомеченного графа (или, что тоже самое, с размером класса эквивалентности по отношению изоморфности, содержащего данный помеченный граф).

## Группа автоморфизмов и число способов расставить пометки

### Лемма

Пусть  $G$  — помеченный граф и  $n = v(G)$ . Тогда существует ровно  $\frac{n!}{|\text{Aut}(G)|}$  помеченных графов на том же множестве вершин, изоморфных  $G$ .

**Доказательство.** Не умаляя общности будем считать, что  $V(G) = [1..n]$ .

- Пусть  $\mathcal{G}_n$  — множество всех помеченных графов на множестве  $[1..n]$ .
- Рассмотрим следующее действие группы  $S_n$  на множестве  $\mathcal{G}_n$ :
  - ▶ для любых  $\sigma \in S_n$  и  $H \in \mathcal{G}_n$  обозначим через  $\sigma H$  граф с  $V(\sigma H) = [1..n]$  и  $E(\sigma H) = \{\sigma(x)\sigma(y) \mid xy \in E(H)\}$ .
- Тогда
  - ▶  $\langle G \rangle$  — множество всех графов на множестве  $[1..n]$ , изоморфных  $G$ ;
  - ▶  $\text{St}(G) = \text{Aut}(G)$ .
- Следовательно, по теореме из курса алгебры получаем, что

$$|\langle G \rangle| = \frac{|S_n|}{|\text{St}(G)|} = \frac{n!}{|\text{Aut}(G)|}.$$



## Задачи о раскрашивании ожерелья

- Сейчас мы отложим на некоторое время задачу о перечислении непомеченных графов и рассмотрим две более простые задачи о перечислении непомеченных объектов.

1. На окружности расставлены  $n$  точек, разбивающие её на равные дуги. Сколькими способами можно раскрасить эти точки в  $a$  цветов, если раскраски, отличающиеся друг от друга поворотом окружности, считаются одинаковыми?
  - Как обычно, под раскраской множества  $M$  в  $a$  цветов мы понимаем отображение  $c: M \rightarrow [1..a]$ .
  - **Неформальная формулировка:** Дана карусель с  $n$  одинаковыми кабинками. Сколькими способами можно раскрасить кабинки в  $a$  цветов?
2. Тот же вопрос, но одинаковыми считаются раскраски, отличающиеся либо поворотом, либо осевой симметрией.
  - **Неформальная формулировка:** Дано ожерелье с  $n$  одинаковыми бусинками. Ожерелье можно как угодно поворачивать и переворачивать. Сколькими способами можно раскрасить бусинки в  $a$  цветов?

## Простой частный случай задачи о каруселях

### Утверждение

Пусть  $p \in \mathbb{P}$ . Тогда существует ровно  $\frac{a^p - a}{p} + a = \frac{a^p + (p-1)a}{p}$  раскрасок  $p$  точек на окружности в  $a$  цветов, если раскраски, отличающиеся друг от друга поворотом окружности, считаются одинаковыми.

**Доказательство.** Занумеруем все точки в порядке обхода по часовой стрелке числами от 0 до  $p - 1$ .

- Номера точек мы будем рассматривать по модулю  $p$ .
  - ▶ То есть можно считать, что мы нумеруем точки элементами кольца  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .
- Тогда поворот окружности на угол  $\frac{2\pi k}{n}$  переводит точку с номером  $i$  в точку номер  $i + k$ .
  - ▶ Число  $k$  также можно рассматривать как элемент кольца  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .
  - ▶ То есть всего получаем  $p$  различных поворотов.
- Рассмотрим произвольную раскраску  $c: \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow [1..a]$  точек окружности в  $a$  цветов.

## Простой частный случай задачи о каруселях

• Докажем, что для раскраски  $c$  выполнено ровно одно из следующих двух утверждений:

- ▶ либо раскраска не изменяется ни при каком повороте (и тогда цвета всех точек одинаковы);
- ▶ либо все  $p$  возможных поворотов приводят к различным раскраскам.

• Пусть раскраска  $c$  не изменилась при повороте на угол  $\frac{2\pi k}{n}$ , где  $0 < k < p$ .

▶ Тогда  $c(0) = c(k) = c(2k) = \dots = c((p-1)k)$ .

▶ Заметим, что  $0, k, 2k, \dots, (p-1)k$  — это все элементы кольца  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

▶ Следовательно, цвета всех точек при раскраске  $c$  одинаковы.

• Всего есть  $a^p$  различных раскрасок помеченных точек. Среди них есть  $a$  одноцветных. Остальные  $a^p - a$  раскрасок разбиваются на  $\frac{a^p - a}{p}$  классов эквивалентности, по  $p$  раскрасок в каждом.

• Итого, получаем  $\frac{a^p - a}{p} + a$  раскрасок с точностью до поворота. □

Следствие (Малая теорема Ферма)

Пусть  $a \in \mathbb{N}$  и  $p \in \mathbb{P}$ . Тогда  $a^p - a \div p$ .

## Классы эквивалентности и действие группы на множестве

- Описанный выше метод трудно применять к общему случаю задачи о раскраске ожерелья (или карусели), поскольку при составном  $n$  возможны нетривиальные раскраски, переходящие в себя при повороте на ненулевой угол.
- Поэтому давайте посмотрим на эти задачи с точки зрения теории групп.
- Во всех задачах о перечислении непомеченных объектов мы ищем количество классов эквивалентности, на которые разбивается множество помеченных объектов.
- Классы эквивалентности образуются в результате применения к помеченным объектам некоторых преобразований. Как правило, эти преобразования образуют группу.
  - ▶ В случае задачи о раскраски карусели, преобразование — это поворот;
  - ▶ в случае задачи о раскраски ожерелья — поворот или осевая симметрия;
  - ▶ в случае задачи о перечислении графов, преобразование — это любая перестановка на множестве его вершин.
- В любом из этих случаев, мы имеем дело с действием некоторой группы на множестве помеченных объектов. Интересующие нас классы эквивалентности — это орбиты элементов множества при данном действии.

## Лемма Бернсайда

### Определение

Пусть задано действие группы  $A$  на множестве  $X$ . Тогда для любого  $\alpha \in A$

- $\text{Fix}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \alpha x = x\}$  — *множество неподвижных точек* элемента  $\alpha$ ;
- элементы множества  $\text{Fix}(\alpha)$  — *неподвижные точки* элемента  $\alpha$ .

### Утверждение

$$\sum_{\alpha \in A} |\text{Fix}(\alpha)| = \sum_{x \in X} |\text{St}(x)|.$$

Доказательство. Обе части равны  $|\{(\alpha, x) \in A \times X \mid \alpha x = x\}|$ . □

### Теорема (Лемма Бернсайда)

Количество орбит действия группы  $A$  на множестве  $X$  равно  $\frac{1}{|A|} \sum_{\alpha \in A} |\text{Fix}(\alpha)|$ .

Доказательство. Присвоим каждому элементу  $x \in X$  вес  $w(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\langle x \rangle|}$ .

- Тогда сумма весов элементов любой орбиты равна 1.

## Доказательство леммы Бернсайда

- Следовательно, сумма весов всех элементов множества  $X$  равна количеству орбит (обозначим его  $N$ ).

- Тогда 
$$N = \sum_{x \in X} \frac{1}{|\langle x \rangle|} = \sum_{x \in X} \frac{|\text{St}(x)|}{|\langle x \rangle| |\text{St}(x)|} = \frac{1}{|A|} \sum_{x \in X} |\text{St}(x)| = \frac{1}{|A|} \sum_{\alpha \in A} |\text{Fix}(\alpha)|. \quad \square$$

### Замечание

Доказанное выше утверждение обычно называют леммой Бернсайда. Но оно было известно и ранее. Сам William Burnside в своей книге “Theory of Groups of Finite Order” 1897 года называл первооткрывателем этой леммы Фробениуса. Но судя по всему, это утверждение было известно еще раньше.

## Задача о каруселях: общий случай

### Теорема

Пусть  $a, n \in \mathbb{N}$ . Тогда существует ровно  $\frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) a^d$  раскрасок  $n$  точек на окружности в  $a$  цветов, если раскраски, отличающиеся друг от друга поворотом окружности, считаются одинаковыми.

**Доказательство.** Как и ранее, занумеруем точки на окружности элементами кольца  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

- Пусть  $X = \{c \mid c: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow [1..a]\}$  — множество всех раскрасок точек в  $a$  цветов.
- Повороты окружности можно рассматривать как действие циклической группы  $C_n$  порядка  $n$  на этом множестве.
  - ▶ Пусть образующая  $\varepsilon$  группы  $C_n$  соответствует повороту на угол  $\frac{2\pi}{n}$ .
  - ▶ Тогда элемент  $\varepsilon^k$  соответствует повороту на угол  $\frac{2\pi k}{n}$ .
- Пусть раскраска  $c$  является неподвижной точкой для элемента  $\varepsilon^k$ .
- Докажем, что раскраска  $c$  является  $d$ -периодичной, где  $d = (k, n)$  (т. е. что  $\forall i (c(i) = c(i + d))$ ).

## Задача о каруселях: общий случай

- Пусть  $d = sk + tn$  — линейное представление НОД.
- Тогда  $c(i) = c(i + sk) = c(i + sk + tn) = c(i + d)$ .
- Обратно, любая  $d$ -периодичная раскраска, очевидно, является неподвижной точкой для элемента  $\varepsilon^k$ .
- Итак,  $\text{Fix}(\varepsilon^k)$  — это в точности множество всех  $d$ -периодичных раскрасок, где  $d = (k, n)$ .
- Тогда  $|\text{Fix}(\varepsilon^k)| = a^d$ , поскольку любая  $d$ -периодичная раскраска однозначно задается цветами точек  $0, 1, \dots, d - 1$ .
- Следовательно, по лемме Бернсайда, число раскрасок с точностью до поворота равно  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a^{(k,n)}$ .
- Далее, запишем числа  $k$  и  $n$  в виде  $k = k_1 d$  и  $n = n_1 d$ . Тогда  $(k_1, n_1) = 1$ . То есть число  $k_1$  можно выбрать  $\varphi(n_1)$  способами. Следовательно, существует ровно  $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$  таких  $k$ , что  $d = (k, n)$ .
- Таким образом, число раскрасок равно  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a^{(k,n)} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) a^d$ . □

## Задача об ожерелье: общий случай

### Теорема

Пусть  $a, n \in \mathbb{N}$ . Обозначим через  $B(n, a)$  количество раскрасок  $n$  точек на окружности в  $a$  цветов, если раскраски, отличающиеся друг от друга поворотом окружности или осевой симметрией, считаются одинаковыми.

Тогда

- $B(n, a) = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) a^d + \frac{a^m}{2}$ , при  $n = 2m - 1$ ;
- $B(n, a) = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) a^d + \frac{a^m(a+1)}{4}$ , при  $n = 2m$ .

**Доказательство.** В отличие от предыдущей теоремы, здесь нужно рассматривать на множестве всех раскрасок действие группы  $D_n$ .

- ▶  $D_n$  — это *группа самосовмещений правильного  $n$ -угольника* или *диэдральная группа*.
- ▶ В этой группе  $2n$  элементов:  $n$  из них соответствуют поворотам, оставшиеся  $n$  — осевым симметриям.
- ▶ Также эту группу можно представлять себе как группу автоморфизмов цикла на  $n$  вершинах.

## Задача об ожерелье: общий случай

- Мы уже знаем, что число неподвижных точек поворота на угол  $\frac{2\pi k}{n}$  равно  $a^{(k;n)}$ .
- Посчитаем число неподвижных точек для осевой симметрии. То есть количество раскрасок, симметричных относительно данной оси.
  - ▶ При  $n = 2m - 1$  любая ось симметрии проходит через одну из отмеченных точек. Остальные  $2m - 2$  точки разбиваются на пары симметричных. Точки в каждой паре должны быть одного цвета. Итого, нам нужно выбрать цвета  $m$  точек: по одной точке в каждой паре и точки, лежащей на оси симметрии. Таких раскрасок  $a^m$ .
  - ▶ При  $n = 2m$  оси симметрии бывают двух видов:  $n/2$  осей не проходят через отмеченные точки и  $n/2$  проходят через две отмеченные точки. В первом случае раскраска однозначно задается выбором цветов  $m$  точек, а во втором — выбором цветов  $m + 1$  точки. То есть в первом случае получаем  $a^m$  раскрасок, а во втором —  $a^{m+1}$ .

## Задача об ожерелье: общий случай

- Тогда при  $n = 2m - 1$  получаем, что

$$B(n, a) = \frac{1}{2n} \left( \sum_{k=0}^{n-1} a^{(k,n)} + na^m \right) = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) a^d + \frac{a^m}{2}.$$

- А при  $n = 2m$  получаем

$$B(n, a) = \frac{1}{2n} \left( \sum_{k=0}^{n-1} a^{(k,n)} + \frac{n}{2} a^m + \frac{n}{2} a^{m+1} \right) = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) a^d + \frac{a^m(a+1)}{4}.$$

□

## Асимптотика числа графов с точностью до изоморфизма

- Введем следующие обозначения.
  - ▶  $G_n$  — число помеченных графов на  $n$  вершинах;
  - ▶  $g_n$  — число графов на  $n$  вершинах с точностью до изоморфизма.
- Мы уже знаем, что  $G_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ .
- Оказывается, что  $g_n$  примерно в  $n!$  раз меньше.
  - ▶ Неформально это означает, что почти у всех графов группа автоморфизмов тривиальна (т. е. состоит из единственного элемента: тождественного преобразования).

### Теорема

$$g_n \sim \frac{G_n}{n!} = \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}.$$

Доказательство. Пусть  $\mathcal{G}_n$  — множество всех помеченных графов на множестве вершин  $V = [1..n]$ .

- Как и ранее, рассмотрим следующее действие группы  $S_n$  на множестве  $\mathcal{G}_n$ :
  - ▶ для любых  $\sigma \in S_n$  и  $H \in \mathcal{G}_n$  обозначим через  $\sigma H$  граф с  $V(\sigma H) = V$  и  $E(\sigma H) = \{\sigma(x)\sigma(y) \mid xy \in E(H)\}$ .

## Асимптотика числа графов с точностью до изоморфизма

- Нам нужно посчитать число неподвижных точек для перестановки  $\sigma \in S_n$ .
- Для этого рассмотрим множество  $V^{(2)}$  двухэлементных подмножеств множества  $V$ .
  - ▶ Другими словами,  $V^{(2)}$  — это множество ребер полного графа  $K_n$  на множестве вершин  $V$ .
- Заметим, что группа  $S_n$  действует также и на множестве  $V^{(2)}$ :  
 $\sigma \cdot xy \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(x)\sigma(y)$ . Тем самым, каждая перестановка  $\sigma \in S_n$  индуцирует перестановку  $\sigma' \in S(V^{(2)})$ , а группа  $S_n$  индуцирует подгруппу  $S_n^{(2)} < S(V^{(2)})$ , состоящую из всех перестановок множества  $V^{(2)}$  вида  $\sigma'$ .
  - ▶ Группа  $S_n^{(2)}$  называется *парной группой* группы  $S_n$ .
  - ▶ Фактически, мы построили гомоморфизм групп  $S_n \rightarrow S(V^{(2)})$ .  
Группа  $S_n^{(2)}$  — это образ данного гомоморфизма.
  - ▶ Нетрудно проверить, что при  $n > 2$  группы  $S_n$  и  $S_n^{(2)}$  изоморфны.
- Для перестановки  $\sigma \in S_n$  нас будут интересовать циклы соответствующей ей перестановки  $\sigma' \in S_n^{(2)}$ . Эти циклы мы будем называть *рёберными циклами* перестановки  $\sigma$ .

## Асимптотика числа графов с точностью до изоморфизма

- Заметим, что граф  $G \in \mathcal{G}_n$  является неподвижной точкой для перестановки  $\sigma \in S_n$ , если и только если для любого рёберного цикла  $C$  перестановки  $\sigma$  либо  $C \subset E(G)$ , либо  $C \cap E(G) = \emptyset$ .
- Тем самым,  $|\text{Fix}(\sigma)| = 2^{q(\sigma)}$ , где  $q(\sigma)$  — число рёберных циклов перестановки  $\sigma$ .
- Тогда по лемме Бернсайда,  $g_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} 2^{q(\sigma)}$ .
- Обозначим через  $S_{n,k}$  множество перестановок из  $S_n$ , имеющих ровно  $n - k$  неподвижных точек.
- Пусть  $g_n^{(k)} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_{n,k}} 2^{q(\sigma)}$ . Тогда  $g_n = \sum_{k=0}^n g_n^{(k)}$ .
  - ▶ Очевидно, что  $g_n^{(0)} = \frac{1}{n!} 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ .
  - ▶ То есть нам нужно доказать, что  $g_n \sim g_n^{(0)}$ .

## Асимптотика числа графов с точностью до изоморфизма

### Лемма

Если  $\sigma \in S_{n,k}$ , то  $q(\sigma) \leq C_n^2 + \frac{1}{2}(k - nk + \frac{k^2}{2})$ .

**Доказательство.** Пусть перестановка  $\sigma$  имеет  $t$  рёберных циклов длины 1.

- Тогда оставшиеся  $\frac{n(n-1)}{2} - t$  пар вершин разбиты на рёберные циклы длины хотя бы 2.
- Следовательно, рёберных циклов длины хотя бы 2 не более  $\frac{n(n-1)}{4} - \frac{t}{2}$ .
- Это означает, что  $q(\sigma) \leq \frac{n(n-1)}{4} - \frac{t}{2} + t = \frac{n(n-1)}{4} + \frac{t}{2}$ .
- Осталось заметить, что рёберными циклами длины 1 перестановки  $\sigma$  могут быть лишь
  - ▶ пары из двух неподвижных точек перестановки  $\sigma$  (их  $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ );
  - ▶ пары вершин, образующих цикл длины 2 перестановки  $\sigma$  (их не более, чем  $\frac{k}{2}$ ).
- Итого,  $t \leq \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} + \frac{k}{2} = \frac{n^2 - 2nk + k^2 - n + 2k}{2} = \frac{n(n-1)}{2} + (k - nk + \frac{k^2}{2})$ .
- Таким образом,  $q(\sigma) \leq \frac{n(n-1)}{4} + \frac{t}{2} \leq \frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{2}(k - nk + \frac{k^2}{2})$ . □

## Асимптотика числа графов с точностью до изоморфизма

- Заметим, что  $|S_{n,k}| \leq C_n^k \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!} \leq n^k$ .
- Тогда  $g_n^{(k)} \leq \frac{1}{n!} |S_{n,k}| 2^{C_n^2 + \frac{1}{2}(k-nk + \frac{k^2}{2})} \leq g_n^{(0)} n^k 2^{\frac{k}{2}(1-n+\frac{k}{2})} \leq$   
 $\leq g_n^{(0)} \left( \frac{n}{2^{\frac{1}{2}(n-1-\frac{k}{2})}} \right)^k \leq g_n^{(0)} \left( \frac{n}{2^{\frac{n-2}{4}}} \right)^k = g_n^{(0)} \left( \frac{n\sqrt{2}}{2^{\frac{n}{4}}} \right)^k$ .
- Следовательно,  $1 \leq \frac{g_n}{g_n^{(0)}} \leq \sum_{k=0}^n \left( \frac{n\sqrt{2}}{2^{\frac{n}{4}}} \right)^k \leq \frac{1}{1 - \frac{n\sqrt{2}}{2^{\frac{n}{4}}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ .
- Тогда по теореме о двух милиционерах  $\frac{g_n}{g_n^{(0)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ ,

а это и означает, что

$$g_n \sim g_n^{(0)} = \frac{G_n}{n!} = \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}.$$

