Дискретная математика

Глава 3. Элементарная комбинаторика

А. В. Пастор

03.10.2025

Дополнительные материалы по комбинаторике

1. М. Холл, *Комбинаторика*. М.: Мир, 1970.
2. Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика*. М.: Мир, 1990.

Слайды по дискретной математике будут публиковаться по адресу

`https://logic.pdmi.ras.ru/~pastor/ITMO/2025-26/`

Основные комбинаторные числа: число размещений

- *Число размещений* из n элементов по k — это количество последовательностей длины k, составленных из различных элементов n-элементного множества. Обозначается A_n^k.
- Это число можно интерпретировать как
  - число инъективных отображений $f\colon [1..k] \to [1..n]$;
  - число способов разложить k шаров по n ящикам (шары имеют номера от $1 \div k$, ящики — $1 \div n$, в ящик помещается не более одного шара).
- *Число размещений с повторениями* из n элементов по k — это количество последовательностей длины k, составленных из элементов n-элементного множества. Обозначается $\widetilde{A}_n^k$.
- Это число можно интерпретировать как
  - число отображений $f\colon [1..k] \to [1..n]$;
  - число способов разложить k шаров по n ящикам (шары имеют номера от $1 \div k$, ящики — от $1 \div n$, в ящик можно класть любое число шаров).
- Мы уже доказывали, что $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$ и $\widetilde{A}_n^k = n^k$.

Основные комбинаторные числа: число сочетаний

- *Число сочетаний* из n элементов по k — это количество k-элементных подмножеств в n-элементном множестве (где $0 \le k \le n$).
- Возможные обозначения: C_n^k или $\binom{n}{k}$.
- Это число можно интерпретировать как
  - число строго монотонно возрастающих функций $f : [1..k] \to [1..n]$;
  - число способов разложить k одинаковых шаров по n пронумерованным ящикам (в каждый ящик помещается не более одного шара).

Теорема

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Доказательство. Пусть $|X| = n$.

- Есть $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ способов выбрать последовательность из k различных элементов X.
- Каждая такая последовательность задает k-элементное подмножество X.
- Каждое подмножество посчитано $k!$ раз, ибо его элементы можно упорядочить $k!$ способами. Итого, $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ различных подмножеств. $\square$

Основные комбинаторные числа: число сочетаний с повторениями

- *Число сочетаний с повторениями* из n элементов по k — это количество неупорядоченных наборов из k элементов n-элементного множества (в отличии от множества, в наборе один и тот же элемент может встречаться несколько раз).
- Возможные обозначения: $\widetilde{C}_n^k$ или $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.
- Это число можно интерпретировать как
  - число нестрого монотонно возрастающих функций $f : [1..k] \to [1..n]$;
  - число способов разложить k неразличимых шаров по n ящикам (в ящик можно класть любое число шаров);
  - число способов выбрать k предметов, если есть предметы n типов (на складе есть хотя бы по k предметов каждого типа; предметы одного типа абсолютно неразличимы).

Формула для числа сочетаний с повторениями

Теорема

$\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^{k}.$

Лемма

Число решений уравнения $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = k$ (1)

в $\mathbb{N}_0$ *равно* $\widetilde{C}_n^k$.

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

- Строим биекцию между решениями уравнения (1) и неупорядоченными наборами из k элементов множества X.
- Каждому решению $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ставим в соответствие набор, состоящий из t_1 экземпляров элемента x_1, t_2 экземпляров x_2, ..., t_n экземпляров x_n.
- Обратно, каждому набору $\mathcal{T}$ ставим в соответствие решение $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, где t_i — число экземпляров x_i в $\mathcal{T}$. □

Формула для числа сочетаний с повторениями: доказательство

Доказательство теоремы.

- Расположим в ряд k шариков и $n-1$ перегородку.
- Всего есть C_{n+k-1}^{k} таких расположений.
- Обозначим через t_1 число шариков до первой перегородки; t_2 — между первой и второй перегородками; ...; t_n — после $(n-1)$-й перегородки.
- Получаем биекцию между решениями уравнения (1) и такими расположениями шаров и перегородок. $\square$

Свойства чисел сочетаний

- $C_n^k = C_n^{n-k}$ (очевидно).
- $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.

Доказательство. $C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$

$$= \frac{n!\cdot(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!\cdot(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!\cdot(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}. \qquad \square$$

Другой способ доказательства. Пусть $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

- $(k+1)$-элементные подмножества X бывают двух видов: содержащие x_0 и не содержащие x_0.
- Если $x_0 \notin S \subset X$, то $S \subset X' = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Таких подмножеств C_n^{k+1}.
- Если $x_0 \in S \subset X$, то удалим x_0 из S. Получим подмножество $S' \subset X'$, где $|S'| = k$. Таких подмножеств C_n^k. $\square$

Большинство соотношений на C_n^k имеют как алгебраическое, так и комбинаторное доказательство.

Свойства чисел сочетаний

- Треугольник Паскаля

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

- $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

Доказательство.

Алгебраически:

$$kC_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = nC_{n-1}^{k-1}.$$

Комбинаторно: Как в левой, так и в правой части формулы записано число k-элементных подмножеств n-элементного множества, в которых один элемент отмечен. □

Свойства чисел сочетаний

- (Бином Ньютона) $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

Доказательство.

- $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ скобок}}$;
- слагаемое $a^{n-k}b^k$ получается, если из k скобок выбрать b, а из остальных — a.
- Это можно сделать C_n^k способами. □

- Другое название чисел C_n^k — *биномиальные коэффициенты*.
- $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$.
  - Комбинаторное доказательство: в левой и в правой части записано число подмножеств n-элементного множества. □
- $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n = (1-1)^n = 0$.
- $C_n^0 + C_n^2 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots = 2^{n-1}$.

Свойства чисел сочетаний

Докажем формулу $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$ комбинаторно.

Доказательство. Докажем, что $C_n^0 + C_n^2 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots$.

- Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
- Построим биекцию между всеми четными и всеми нечетными подмножествами X.
- Пусть $f(S) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} S \cup \{x_n\}, & x_n \notin S \\ S \setminus \{x_n\}, & x_n \in S. \end{cases}$
- Получаем отображение $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, обладающее следующим свойством: $\forall S \, (f(f(S)) = S)$.
  - Отображение, обладающее таким свойством называется *инволюцией*.
  - В частности, это означает, что f обратно самому себе, следовательно, f — биекция.
- При этом, $|S|$ и $|f(S)|$ всегда имеют разную четность.
- Таким образом, f также задает биекцию между всем четными и всеми нечетными подмножествами X. $\square$

Мультиномиальные коэффициенты

Определение

Пусть $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$, где $m \in \mathbb{N}$ и $n, k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{N}_0$. Тогда число способов разбить n-элементное множество X на m непересекающихся подмножеств $X_1, X_2, \ldots, X_m$, где $|X_i| = k_i$, обозначается $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}$ и называется *мультиномиальным коэффициентом*.
(Другое название: *полиномиальный коэффициент*.)

Теорема

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

Доказательство. Есть $n!$ способов упорядочить элементы множества X.

- Для каждого способа, помещаем первые k_1 элементов в X_1; следующие k_2 элементов в X_2 и т. д.
- Получаем разбиение X на подмножества нужного размера.
- Каждое разбиение посчитано $k_1!k_2!\ldots k_m!$ раз. $\square$

Обобщенный бином Ньютона

Теорема

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству Бинома Ньютона.

- При раскрытии скобок слагаемое $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}$ получается, если выбрать из k_1 скобок слагаемое a_1, из k_2 скобок слагаемое a_2, …, из k_m скобок слагаемое a_m.
- Такой выбор можно сделать в точности $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}$ способами. □

Формула включений-исключений

Примеры

1. Пусть A, B — конечные множества. Тогда

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

2. Пусть A, B, C — конечные множества. Тогда

$$|A \cup B \cup C| = \\ = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + \\ + |A \cap B \cap C|.$$

Формула включений-исключений

Теорема (Формула включений-исключений)

Пусть $A_1, \dots, A_n$ — конечные множества. Тогда

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\varnothing \neq I \subset [1..n]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|. \qquad (1)$$

Доказательство.

- Пусть $x \in A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ и x не принадлежит остальным A_j.
- Тогда x учитывается в формуле (1) с коэффициентом

$$\sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{\ell+1} C_k^{\ell} = 1.$$

$\square$

Формула включений-исключений

Следствие (другая формулировка формулы включений-исключений)

Пусть X *— конечное множество,* $|X| = N$*;*

- $P_1, \dots, P_n$ *— свойства элементов множества* X *(т. е. одноместные предикаты на* X*);*
- $N_{i_1,\dots,i_k}$ *— число элементов, удовлетворяющих* $P_{i_1}, \dots, P_{i_k}$*;*
- $N(0)$ *— число элементов, не удовлетворяющих ни одному свойству.*

Тогда

$$N(0) = N - \sum_i N_i + \sum_{i_1<i_2} N_{i_1,i_2} - \dots \\ \dots + (-1)^k \sum_{i_1<\dots<i_k} N_{i_1,\dots,i_k} + \dots \\ \dots + (-1)^n N_{1,\dots,n}. \quad (2)$$

Субфакториалы (задача о беспорядках)

Определение

- *Перестановкой* на множестве M называется произвольная биекция $\sigma: M \to M$.
- *Неподвижной точкой* перестановки σ называется такой элемент $x \in M$, что $\sigma(x) = x$.
- S_n — множество всех перестановок на $[1..n]$.

Замечание

Мы знаем, что $|S_n| = n!$.

Определение

$D(n)$ — число перестановок из S_n, не имеющих неподвижных точек.

Субфакториалы: рекуррентная формула

Теорема

$D(n+1) = n(D(n) + D(n-1))$.

Доказательство.

- Пусть $\sigma \in S_{n+1}$; $k = \sigma(n+1)$; $\ell = \sigma^{-1}(n+1)$.
- Возможны два случая: $k \neq \ell$ или $k = \ell$.

  1° Пусть $k \neq \ell$.

  - Тогда $\sigma'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sigma(x), & x \neq \ell \\ k, & x = \ell \end{cases}$ — перестановка из S_n без неподвижных точек.
  - Для каждого $k \in [1..n]$ есть $D(n)$ таких перестановок.

  2° Пусть $k = \ell$.

  - Тогда $\sigma|_{[1..n]\setminus\{k\}}$ — перестановка на $[1..n] \setminus \{k\}$ без неподвижных точек.
  - Для каждого $k \in [1..n]$ есть $D(n-1)$ таких перестановок.

- Итого, получаем $nD(n) + nD(n-1)$ перестановок без неподвижных точек. $\square$

Субфакториалы: явная формула

Замечание

Для обычных факториалов выполняется такое же соотношение:

$$(n+1)! = n(n! + (n-1)!).$$

Поэтому числа $D(n)$ называют *субфакториалами*.

Теорема

$$D(n) = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

Доказательство. Пусть $X = S_n$.

- P_i — свойство "$\sigma(i) = i$" для перестановки $\sigma \in S_n$.
- Тогда $N = n!$ и $N_{i_1,\dots,i_k} = (n-k)!$.
- По формуле (2) имеем: $D(n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(n-k)!C_n^k = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$. $\square$

Субфакториалы: явная формула

Следствие

$D(n) = \mathrm{round}(\frac{n!}{e})$; *более того,* $|D(n) - \frac{n!}{e}| < \frac{1}{n+1}$.

Доказательство. Напомним, что $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Тогда

- $\frac{n!}{e} = n! \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + n! \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} =$
$$= D(n) + (-1)^{n+1} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!};$$
- $|D(n) - \frac{n!}{e}| = |\sum\limits_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!}| = |\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \dots|$;
- $\sum\limits_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!} = \left(\frac{n!}{(n+1)!} - \frac{n!}{(n+2)!}\right) + \left(\frac{n!}{(n+3)!} - \frac{n!}{(n+4)!}\right) + \dots > 0$;
- $\sum\limits_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!} = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{n!}{(n+2)!} - \frac{n!}{(n+3)!}\right) - \left(\frac{n!}{(n+4)!} - \frac{n!}{(n+5)!}\right) - \dots < \frac{1}{n+1}$. $\square$

Функция Эйлера

Определение

• Натуральные числа a и b называются *взаимно простыми*, если у них нет общего натурального делителя, отличного от единицы.

• $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел, меньше либо равных n и взаимно простых с n (*функция Эйлера*).

Теорема

Пусть $n = p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s}$ (где $p_1, \dots p_s$ — различные простые и $a_1, \dots, a_s$ — натуральные числа). Тогда $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_s})$.

Доказательство. Пусть $X = [1..n]$.

• P_i — свойство "$x \,\vdots\, p_i$" для числа $x \in X$.

• Тогда $N_{i_1,\dots,i_k} = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}}$.

• По формуле (2) имеем:

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le s} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}} = n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_s}). \qquad \square$$

Число сюръективных отображений

Теорема

Число сюръективных отображений $f\colon [1..k] \to [1..n]$ *равно* $\sum\limits_{s=1}^{n} (-1)^{n-s} C_n^s s^k$.

Доказательство.

- Пусть X — множество всех отображений $f\colon [1..k] \to [1..n]$.
- P_i — свойство "$f^{-1}(i) = \varnothing$" для отображения $f \in X$.
  - Тогда $N = |X| = n^k$;
  - $N_{i_1,\dots,i_\ell} = (n-\ell)^k$ — количество функций, удовлетворяющих данным ℓ свойствам.
  - $f \in X$ — сюръекция $\Leftrightarrow$ f не удовлетворяет ни одному из свойств. Следовательно, число сюръекций равно $N(0)$.
- По формуле включений-исключений имеем:

$$N(0) = \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{\ell} C_n^{\ell} (n-\ell)^k = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{n-s} C_n^s s^k.$$

(Последнее равенство получено заменой переменной $s = n - \ell$). $\square$